FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY

COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

5.06 (4

BIBLIOTHECA GYMNASII ARNSTAD

TOMVS II.

AD ANNVM cIↃ IↃCC XXVII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIↃ IↃCC XXIX.

4/13/1916
coll.

16.70252 april 28

INDEX COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Iac. Hermanni, de Conſtructione Aequationis differentialis primi gradus. 1

F. C. Maieri, Trigonometrica. 12

Chriſt. Goldbach, de Transformatione Serierum. 30

Io. Georg. Leutmanni, de Bilancibus et nouis inuentis ſtaticis. 35

F. C. Maieri de Planetarum ſtationibus. 82

Leon. Euleri Problematis Traiectoriarum reciprocarum ſolutio. 92

Dan. Bernoulli Theoria noua de motu aquarum per canales quoscunque fluentium. 111

Leon. Euleri, de nouo quodam curuarum Tautochronarum genere. 126

Iac. Hermanni, Theoria generalis motuum. 139

Chriſt. Goldbach, de diuiſione curuarum. 174

F. C. Maieri, de vſu interpolationis in ſolſtitiorum momentis indagandis. 180

Iac. Hermanni, de conſtructione aequationum differentialium. 188

Ioh. Bernoulli, Theoremata de conſeruatione virium viuarum. 200

Io.

Dan. Bernoulli, Demonſtrationes Geometricae de Centro virium, oſcillationis, et grauitatis. 208

G. W. Krafft, de lineis curuis quae euolutae ipſae ſe generant. 216

IN CLASSE PHYSICA.

Georg Bern. Bülffingeri, de Tubulis capillaribus. 233

Io. Georg. Du Vernoi de Glandulis cordis. 288

Dan. Bernoulli, de Actione fluidorum. 304

I. C. Buxbaum, Noua Plantarum genera. 343

Leonardi Euleri, Tentamen explicationis Phaenomenorum aeris. 347

I. C. Buxbaum, Plantae dubiae ad ſua genera relatae. 369

Io. G. Du Vernoi, de Pene Elephanti. 372

G. B. Bülffingeri, de Frictionibus corporum ſolidorum. 403

Obſeruationes Anatomicae. 415

IN CLASSE HISTORICA.

T. S. Bayeri, de Cimmeriis. 419

Eiusdem Numi decem Erythraeorum in Ionia illuſtrati. 434

Eiusdem Numus Gyrtones illuſtratus. 459

Eiusdem Vetus Inſcriptio Pruſſica. 470

Vita *Nicolai Bernoulli*. 482

* * *

Obſeruationes Aſtronomicae. 489

CLAS-

CLASSIS

PRIMA

continens

MATHEMATICA.

ANNAE

RVSSORVM

IMPERATRICI

dedicandum putarunt, quos quidem a propoſito non abſterruit opuſculorum tenuitas atque exilitas, quando fructus non in alieno ſolo natos nec ſine cura demeſſos, ſed quales officii ac muneris ratio poſtulabat, TIBI offerre non indecorum viſum eſt.

Interea ſpem omnem in Tua benevolentia ponimus. Reverte Deo propitio in urbem patriam et inter acclamationes tot nationum, quarum votis atque precibus expetita es, ſolium Avorum Tuorum PIA, FELIX, AVGVSTA conſcende.

Moſcuae Nonis Febr.
A. cIↄ Iↄcc xxx.

Academicorum nomine

Chriſtianus Goldbach.

De Conſtructione
AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS
primi gradus *A*, in qua *a*, *b*, *c*, *e*, *f*, g, ſunt coefficientes cum ſuis ſignis + vel —, vt libet dati.

$$A \text{ - - - - } adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy = 0.$$

Autore I. Hermanno.

CVm olim in *Phoronomia* Lib. II. Cap. 19. de reſiſtentia medii fuſius agerem, ſubdidi in Scholio ad Propoſitionem 72, nondum conſtare qua ratione curva reſiſtentiarum conſtrui debeat, ne quidem conceſſis quadraturis, cum reſiſtentiae ſunt vt celeritates *I. Febr. 1727.*

mobilis; coniectabam tamen curuam ex hypotheſi iſta naſcentem fore tranſcendentem. Dedit hoc occaſionem Viris doctiſſimis, *Nicolao Bernoulli* et *Comiti Riccato* penitius in hanc rem inquirendi cum ſucceſſu, nam vterque eorum reperit curuam quaeſitam algebraicam eſſe poſſe. Ego quoque ſtatim poſt editam *Phoronomiam*, aequationem ſupra poſitam A conſtruendam mihi ſumſi, quae curuam reſiſtentiarum medii, de qua nunc ſermo eſt, tanquam caſum particularem intra ambitum ſuum complectitur, et cum ineunte anno 1716. Ill. *Monmortium* hac de re certiorem feciſſem, litteris die 27. Ian. 1716. ad me datis, ſequentia reſcripſit: *Il eſt vrai Monſieur, que je ſuis tres ſurpris d'apprendre de vous, que cette Equation* $adx + bdy + cxdx + eydx + fxdy + gydy = 0$, *eſt integrable, les lettres* a, b, c, *etc. exprimant des nombres quelconques, affectés de ſignes auſſi quelconques.*

Cum vero edendae Phoronomiae incumberem et tantum non omnia per Geometriam linearem absque calculo in ea tradere conatus ſim, conſtructio autem lineae reſiſtentiarum in dicta hypotheſi per hanc viam pure geometricam non occurreret, ideo tunc ſcripſi non conſtare conſtructionem illius lineae; quaeſtionem enim per calculum, tunc ne quidem tentaueram.

Nunc vero Analyſin aequationis A, tanto libentius Academiae iudicio demum expono, quanto frequentior eſſe poteſt uſus eius in reſolutione multorum problematum Matheſeos mixtae. Adducam primum eam analyſin in quam olim incidi, cum primum aequationem illam conſtruendam mihi propoſui.

Mon-

Monſtrabo deinceps, quomodo per methodum praeterita aeſtate exhibitam eadem aequatio tractari debeat; ac denique tertium addam modum quo aequatio reſolui poteſt, in difficilioribus quoque egregio vſui futurum.

1. Fiant $x = p + h$, et $y = q + i$, ubi p et q ſunt variabiles, h et i vero quantitates conſtantes, ſurrogandoque in aequatione A --- $adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy$, in locum indeterminatarum x et y et elementorum earum dx, et dy, earum aeſtimationes modo aſſumtas earumque elementa, mutabitur aequatio A, in ſequentem B ---

$$\begin{array}{l}+ch\\+ei\\+a\end{array} dp \begin{array}{l}+fh\\+gi\\+b\end{array} dq + cpdp + eqdp + fpdq + gqdq = 0.$$

2. Vt vero in aequatione B, duo prima membra euaneſcant, oportet vt fiant $ch + ei + a = 0$, et $fh + gi + b = 0$, ex quibus eliciuntur valores litterarum aſſumtiarum h, et i, nempe $h = \frac{ag - be}{ef - cg}$, et $i = \frac{bc - af}{ef - cg}$; ipſa vero aequatio B abit in ſequentem C -- $cpdp + eqdp + fpdq + gqdq = 0$

3. Ad ulteriorem reductionem aequationis C, aſſumo $q = kp + t$, ubi t eſt iterum variabilis k vero conſtans, adeo vt ſit $dq = kdp + dt$. Suffectis enim in aequatione C, $kp + t$, et $kdp + dt$, pro q et dq reſpectiue,

 reſul-

reſultabit inde aequatio D ---
$$\begin{array}{llll} +gkk & pdp+ & gktdp+ & gkpdt \\ +ek & & +e & +f \\ +fk & & & \\ +c & & & \end{array}$$
$+gtdt=0.$

4. In hac inuenta aequatione iam primus terminus euaneſcere debet poſita aequatione $gkk+ek+fk+c=0$, ex qua elicietur $k=\frac{-e-f+l}{2g}$, facta nempe $l=\sqrt{(ee+2ef+ff-4cg)}$, nam aequatio D tunc mutabitur in
$$\begin{array}{ll} +gktdp+ & gkpdt+gtdt=0, \\ +e & +f \end{array}$$
vel reſtituendo inuentum valorem litterae k, in ſequentem E--- $(e-f+l)\,tdp+(-e+f+l)\,pdt+2gtde=0.$

5. Ad ſummationem aequationis E, diuidatur ea per pt, et emerget $(e-f+l)\frac{dp}{p}+(f-e+l)\frac{dt}{t}+\frac{2gdt}{p}=0$, aequatio compoſita ex duobus elementis logarithmicis $\frac{dp}{p}$, et $\frac{dt}{t}$; vt vero haec aequatio integrabilis fiat, ponatur $\frac{2gdt}{p}=\frac{du}{u}$, et habebimus $e-f+l.\frac{dp}{p}+f-e+l\,\frac{dt}{t}+\frac{du}{u}=0$, quae eſt integrabilis, nam integralis eius eſt $(e-f+l)\mathrm{Log}.p+(f-e+l)\,\mathrm{Log}.t+\mathrm{Log}.u=\mathrm{Log}.D$ quantitatis conſtantis; huic vero aequationi Log.micae competit abſoluta $p^{e-f+l}t^{f-e+l}u=D$, hinc $p^{-1}=D^{\frac{-1}{e-f+l}}t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}u^{\frac{1}{e-f+l}}$, adeoque $\frac{2gdt}{p}\left(=\frac{du}{u}\right)=D^{\frac{-1}{e-f+l}}t^{\frac{f-e+l}{ef+l}}u^{\frac{1}{e-f+l}}\times 2gdt$, ex hac vero reſultabit facta $D=1$, ſequens $2gt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}dt=u^{\frac{-1}{e-f+l}-1}\,dt.$ Huius vero integralis eſt

$(e-f+l)$

$\frac{(e-f+l)g}{l} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = (e-f+l)\Delta + (f-e-l) u^{\frac{-1}{e-f+l}}$, vel $\frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e-f+l}}, + u^{\frac{-1}{e-f+l}} = \Delta$. Sed aequatio ſupra inuenta $p^{e-f+l}\ t^{f-e+l} u = 1$, praebet $u^{\frac{-1}{e-f+l}} = p t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}$, propterea praecedens aequatio integralis, mutatur in ſequentem F --- $p t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$. In qua Δ ſignificat quantitatem conſtantem.

6. Surrogando praeterea in aequatione F aeſtimationes litterarum p et t nempe pro p, $x-h$ vel $x + \frac{be-ag}{ef-cg}$, et pro t, $bk-i+kx+y$, id eſt $\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + (\frac{ee+ef-cl-2cg}{2efg-2cgg}) b + \frac{e+f-l}{2g} x + y$. Integralis quaeſita exprimetur aequatione G --- $(x + \frac{be-ag}{ef-cg}) \times$

$$(\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-el-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} +$$

$$\frac{g}{l} (\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-el-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta.$$

vel etiam

$$(y + \frac{af-bc}{ef-cg}) \times (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2ef-2cg} b + \frac{e+f-l}{2c} y + x)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}}$$

$$+ \frac{c}{l} (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2l} y + x)^{\frac{2l}{f-e+l}} = \Delta.$$

Sed haec poſterior H reſultat ex hypotheſi, quod $p = kq + t$, cum altera G deriuata ſit ex poſitione ipſius $q = kp + t$.

7. Si $2\sqrt{cg}$ excedit ſummam $e+f$, ambae aequationes G et H inutiles fient, quia conſtructio aequationis A tunc pendet a quadratura Circuli et Hyperbolae, quae

 modo

modo ſequenti inſtitui poteſt. In recta indefinita AO, capiatur CA $= \frac{l}{2c}$, et in AD ad AO normali AB $= \frac{e+f}{2c}$. Deſcribantur deinceps centro C, radio CA circulus AEF, et per B, hyperbola QBK inter aſymptotas CP, CO: quibus praeparatis, capiatur quadrilineum hyperbolicum ABKI $= \frac{f-e}{l3}$ ſectoris FCE, factaque C*G* quarta proportionali ad CB, CD, et CA, ducatur per punctum G recta GH aequidiſtans ipſi AD; et facto quadrilineo ABML = quadrilineo GHKI, fiat tandem, ut CA ad BD ita CL ad CN. Erunt $x =$ CN $+ \frac{ag - be}{ef - cg}$, et $y =$ CL $+ \frac{bc - af}{ef - cg}$, coordinatae curuae conſtruendae, vbi tamen meminiſſe oportet, quod nunc ſit $l = \surd(4cg - ee - 2ef - ff)$.

8. Itaque integralis aequationis $udu - 2budy + ydy = 0$, quam D. *Comes Riccatus* dedit pro linea reſiſtentiarum medii cum mobile in caua parte cycloidis delabitur et reſiſtentiae celeritatibus actualibus mobilis proportionales ſunt, eſt tantum caſus particularis aequationum G vel H §. 6. exhibitarum; praebent enim hae aequationes $u \times (-b - u\surd(bb - 1.) + y)^{\frac{b + \surd bb - 1}{-b + \surd bb - 1}} + \frac{1}{2\surd bb - 1}$

$(-b \cdot u\surd(bb - 1.) + y)^{\frac{\surd bb - 1}{-b + \surd bb - 1}} = \Delta$ pro integrali aequationis D. *Riccati*. In qua tamen b vnitatem excedere debet, alioqui conſtructio aequationis penderet a quadratura circuli et hyperbolae vt §. 7. oſtenſum.

9. Integralis aequationis ſuperioris E (§. 4.) etiam hoc modo inueniri poterat, aſſumendo aequationem

Apt^a

$Apt^{\alpha} + Bt^{\beta} = \Delta$, nam differentialis eius , quae eſt $At^{\alpha} dp + \alpha Apt^{\alpha-1} dt + \beta Bt^{\beta-1} dt = o$, per diuiſionem cum quantitate $t^{\alpha-1}$, reducitur ad $Atdp + \alpha Apdt + \beta Bt^{\beta-\alpha} dt = o$, quae eiusdem formae eſt, excepto membro $\beta Bt^{\beta-\alpha} dt$, cum aequatione E. Quod ſi vero $\beta - \alpha$ fuerit $= 1$, ambae aequationes eiusdem prorſus formae euadent, ſint ergo $A = e - f + l$, $\alpha A = f - e + l$, adeoque $\alpha = \frac{f-e+l}{e-f+l}$, et $\beta = \alpha + 1 = \frac{2l}{e-f+l}$, ac denique $\beta B = 2g$, atque adeo $B = \frac{\overline{e-f+l} \times g}{l}$. Quare aequatio ſupra aſſumta mutatur in

$$\overline{e-f+l} \times pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \overline{e-f+l} \times \frac{g}{l}\, t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \overline{e-f+l} \times \Delta.$$

Nam pro conſtanti Δ quaelibet alia pro lubito aſſumi poteſt. Diuidendo porro aequationem vltimo inuentam per $e-f+l$, reſultabit $pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \frac{g}{l}\, t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$, quae eſt aequatio integralis aequationis E, quam ſupra §. 5. iam inuenimus.

10. Integralis aequationis A, inueniri quoque poteſt per methodum integrandi quam in Tom I. *Comment. Acad. Scient. Imp.* p. 149. exhibui, idque ſine praeuia aequationis integrandae reductione. Nam aequatio A cuius integralis quaeritur, per ea quae ibi in *Scholio generali* dicta ſunt, eſt quantitas, quam per dK illic deſigno , cumque (*hyp.*) ſit $dK = o$, erit etiam $R^{\lambda} dK = o$, vbi R ſignificat quantitatem quamcunque, et λ quoque exponentem quemcumque, ſit ergo $R = \alpha + \beta x + y$, habebimusque per dictam methodum aequationem *Canonicam* $dK = \lambda + 1$.

MdR

$MdR + RdM$, vbi dK ſignificat quantitatem $adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy$.

Iam quia in $dR = \beta dx + dy$, ineſt membrum βdx, diuido omnia membra quantitatis dK per dx, in quibus haec diuiſio ſuccedit, inuenientur quoti a, cx et ey, ſed loco coefficientium a, c et e ſcribam A, B et C, adeo vt aſſumenda ſit aequatio $M = A + Bx + Cy$. Sufficiendo iam in aequatione *Canonica* $A + Bx + Cy$, et $\alpha + \beta x + y$, pro M et R, nec non $Bdx + Cdy$ et $\beta dx + dy$, pro dM et dR, mutabitur aequatio Canonica in ſequentem $cxdx + fxdy + eydx + gydy + adx + bdy =$

$$\begin{array}{llllll}
\beta\lambda Bxdx & +\lambda Bxdy & +\beta\lambda Cydx & +\lambda Cydy & +\beta\lambda Adx & +\lambda Ady \\
+2\beta B & +B & +\beta C & +2C & +\beta A & +A \\
 & +\beta C & +B & & +\alpha B & +\alpha C
\end{array}$$

Collatio terminorum homologorum praebet

$\alpha = \frac{-2a}{f-e+l} + \frac{(e+f+l)b}{(f-e+l)g}$, exiſtente $l = \sqrt{(ee + 2ef + ff - 4cg)}$

$\beta = \frac{e+f+l}{2g}$, et $\lambda = \frac{2e-2f}{f-e+l}$

$A = \frac{(f-e+l)ag}{(e-f+l)l} + \frac{(2ee+2ef-4cg-2el)b}{e-f+l}$

$B = \frac{2cg-ee-ef+el}{2l}$, et $= C = \frac{(f-e+l)g}{2l}$.

Integralis vero quaeſita, quae per *Theor.* I. loco ſupra citato eſt $MR^{\lambda+1} = \Delta$, ubi Δ eſt conſtans, iam inuenietur eſſe $(y + \beta x + \alpha)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}} \times (Cy + Bx + A) = \Delta$. Aſſignando litteris aſſumtitiis α, β, λ, A, B, C eos valores quos modo indicauimus. Quamuis vero haec vltima aequatio a ſuperioribus G vel H §. 6. exhibitis, diſcrepare videtur; ad eas tamen facile reduci poterit.

11. Si in aequatione conſtruenda A, infima membra

bra $+adx+bdy$ deſunt, euaneſcent quoque aeſtimationes litterarum A et α, et incidemus in caſum quem Cel. *Iohann. Bernoulli*, in dictis *Commentariis pag.* 179. pluribus excuſſit, oſtendendo quomodo per methodum ſuam integralis aequationis propoſitae, quam ipſe Canonicam primi gradus vocat, inueniri poſſit, et indicando quando aequatio ab ipſo inuenta, eſt ad curuam algebraicam, et quando ad lineam rectam.

Ex analyſi vero quam praecedenti §. exhibui, iterum patet, aequationem inuentam ceſſare, quoties ſumma coefficientium $e+f$ deficit a quantitate $2\sqrt{cg}$, quia hoc caſu l fit quantitas imaginaria.

12. In §. 16. poterat quoque aſſumi $M=A+Bx+Cy+N$, vbi N eſt noua indeterminata, ſufficiendo enim huius M et dM valores modo indicatos in ſuperiori noſtra aequatione *Canonica*, perueniemus ad aequationem H . .

$$\begin{array}{llllll} +a\,dx & +b\,dy & +cx\,dx & +fx\,dy & +ey\,dx & +gy\,dy = (\lambda+1)N\,dR + R\,dN. \\ -\beta\lambda A & -\lambda A & -\beta\lambda B & -\lambda B & -\beta\lambda C & -\lambda C. \\ -\beta A & -A & -2\beta B & -B & -\beta C & -2C. \\ -\alpha B & -\alpha C & & -\beta C & -B. & \end{array}$$

Si nunc in ſiniſtra parte huius aequationis H omnia membra, exceptis duobus primis, euaneſcere faciamus, inuenientur pro litteris aſſumtitiis β et λ, et pro B ac C iidem valores quos iam ſupra §. 10. elicuimus, ſed remanebit aequatio.

$$\text{I} \,..\quad \begin{array}{ll} +a\,dx & +b\,dy = (\lambda+1)N\,dR + R\,dN. \\ -\beta\lambda A & -\lambda A \\ -\beta A & -A \\ -\alpha B & -\alpha C \end{array}$$

Sed ſi $a-(\lambda+1)\beta A-\alpha B$, fuerit ad $b-(\lambda+1)A-\alpha C$ ut β ad 1, aequatio I integrabilis erit, K . . . $\beta Q dx + Q dy = (\lambda+1) N dR + R dN$, exiſtente $Q = -(\lambda+1) A - \alpha C + b$. Atqui $\beta dx + dy = dR$, ergo aequatio K abit in $Q dR = (\lambda+1) N dR + R dN$, ducatur haec in R^{λ}; naſcetur inde $QR^{\lambda} dR = \lambda+1 NR^{\lambda} dR + R^{\lambda+1} dN$, quae integrabilis eſt, nam integralis eius inuenietur eſſe $= \frac{QR^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \Delta = NR^{\lambda+1}$, adeoque $N = \Delta R^{-\lambda-1} + \frac{Q}{\lambda+1}$.

13. Superior analogia $-(\lambda+1.)\beta A - \alpha B + a. -(\lambda+1)A - \alpha C + b :: \beta. 1$ praebet $\alpha (= \frac{b\beta - a}{\beta C - B}) = \frac{-2a}{f-e+l} + \frac{(e+f+l)b}{(f-e+l)g}$, ut ſupra, et $Q (= -(\lambda+1)A - \alpha C + b)$ nunc fiet $= -(\lambda+1.)A + \frac{(f-e+l)ag}{(e-f+l)l} + \frac{(2ee+2ef-4cg-2el)b}{e-f+l}$. In hac aeſtimatione vero quantitatis Q, A eſt arbitrariae magnitudinis : veruntamen ſi ipſi is valor detur, quem ſupra pro A inueneramus, euaneſcet Q; et ea ipſa aequatio integralis inde emerget, quam paullo ante inueneramus. Sin vero $A = 0$, fiet quidem $M = Cy + Bx + N = Cy + Bx + \frac{Q}{\lambda+1} + \Delta R^{-\lambda-1}$; et integralis quaeſita $(y+\beta x+\alpha)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}} \times (Cy + Bx + \frac{Q}{\lambda+1}) +$ conſtanti $=$ alii conſtanti. Verum $\frac{Q}{\lambda+1}$ eadem eſt cum quantitate quam §. 10. pro aeſtimatione litterae aſſumtitiae A inueneramus, adeoque etiam in hoc caſu Integralis haec eadem eſt cum iam exhibita.

14. Tandem conſtructio aequationis A . . $adx + bdy + cxdx +$ etc. $= o$ etiam ſequenti modo obtineri poteſt

teſt, ponendo $dy = zdx$, hoc pacto enim aequatio A abibit in ſequentem $adx + bzdx + cxdx + fxzdx + eydx + gyzdx = o$; quae diuiſibilis eſt per dx, et prodibit aequatio $a + bz + cx + fxz + ey + gyz = o$, ex hac vero elicitur aequatio L... $+ y = -\left(\frac{fz+c}{gz+e}\right)x - \left(\frac{bz+a}{gz+e}\right)$; hinc aequatio differentiata praebet, $dy(zdx) = \frac{-(fz+c)dx}{gz+f} + \frac{(cg-ef)xdz}{(gz+e)^2} + \frac{(ag-be)dz}{(gz+c)^2}$

haec vero rite reducta, ſuppeditat ſequentem aequationem M, quae integrabilis eſt, M... $\frac{dx}{x} = \frac{(cg-ef)\,dz}{(gzz + {e \atop +f}z + c) \times (gz+e)}$

$+ \frac{(ag-be)dz}{(gzz + {e \atop +f}z + c) \times (gz+e)x}$

15. Ad conſtructionem eius ponamus $\frac{dP}{P} = \frac{(cg-ef)dz}{(gzz + {e \atop +f}z + c) \times (gz+e)}$, eritque $\frac{(ag-be\,dz)}{(gzz + {e \atop +f}z + c) \times (gz+e)} = \frac{ag-be}{cg-ef}\frac{dP}{P}$, hoc pacto enim aequatio M, abit in hanc alteram $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{(ag-be.dP)}{cg-ef\,Px}$. Dicatur $\frac{ag-be.dP}{cg-ef.Px} = \frac{dQ}{Q}$, eritque $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q}$, et ex hac elicitur $x = PQ$, qui valor in $\frac{ag-be.dP}{cg-ef.Px} = \frac{dQ}{Q}$, ſubſtitutus dat $\frac{ag-b2\,dP}{cg-ef\,PPQ} = \frac{dQ}{Q}$, adeoque $dQ = \frac{ag-be\,dP}{cg-ef.PP}$, et ſumtis integralibus $Q = \Delta + \frac{be-ag}{cg-ef\,P}$, hinc $x (= PQ) = \Delta P + \frac{be-ag}{cg-ef}$, et $\left(x + \frac{ag-be}{cg-ef}\right)P^{-1}$ $=$ conſtanti Δ. Sed quid eſt P?

Eſt autem $\frac{(cg-ef)\,dz}{(gzz + {e \atop +f}z + c) \times (gz+e)}\left(\frac{dP}{P}\right) = \frac{g\alpha dz}{gz+m} + \frac{\beta dz}{z+n} + \frac{gdz}{gz+e}$, ubi ſunt $l = \sqrt{(ee + 2ef + ff - 4cg)}$, $m = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}l$; $n = \frac{e+f+l}{2g}$; $\alpha = \frac{e-f-l}{2l}$, et $\beta = \frac{f-e-l}{2l}$.
Ipſa vero binomia $gz + m$ et $z + n$, ſunt bini factores

 tri-

trinomii $gzz{+e \atop +f}z+c$. Hinc eſt Log. $P=\alpha \text{Log.}(gz+m)$ $+\beta \text{Log.}(z+n)+\text{Log.}(gz+e)$, et aequatio ex hac ſerie quantitatum Logarithmicarum reſultans eſt $P=(gz+m)^{\alpha}\times(z+n)^{\beta}\times(gz+e)$. Eſt ergo integralis quaeſita

$$(gz+m)^{-\alpha}\times(z+n)^{-\beta}\times(gz+e)^{-1}\times\left(x+\frac{ag-be}{eg-ef}\right)=\Delta.$$

In hac vero eſt $z=\frac{-a-cx-ey}{+b+fx+gy}$.

TRIGONOMETRICA

F. C. Maieri.

I.

M. Febr. 1727.

Collegi in hoc ſcripto theoremata quae diuerſis temporibus in Conuentu noſtro propoſui, ad quae prouocaui aliquoties antea, et ſaepius prouocabo poſthac. Non omnia quidem noua ſunt, neceſſaria tamen ad demonſtranda ſecutura. Theorema generale trado, via analytica repertum, ex quo facili opera omnia, quae vulgo habentur, praecepta trigonometriae ſphaericae tanquam conſectaria deriuantur. Modum oſtendo quo omnes regulas Trigonometricas vtcunque compoſitas ſolo ſinuum canone logarithmico expedire licet, et, quod hactenus forſan

ſan parce factum eſt, calculum literalem ad trigonometrica problemata difficiliora ſic accommodo, vt eius laus et praeſtantia in hac quoque Geometriae parte clarius diſpaleſcat.

2. Praemittam theoremata quaedam, quae, licet ad prima Trigonometriae elementa ſpectent, obuia tamen non ſunt vbique, et legentem morari poſſent ſi alio ablegaretur. Primum itaque hoc eſt: *Si ſinus et coſinus, item tangens et cotangens acuti anguli, poſitiui eſſe cenſeantur, obtuſi anguli tangens et ſinus poſitiui quidem manent, ſed cotangens ipſius et coſinus priuatiui fiunt: cadunt enim in plagam reſpectu centri oppoſitam ei quam acutorum ſinus et tangentes occupant. Eodem modo intelligitur, quod tangens et ſinus aeque ac cotangens et coſinus anguli tres quadrantes non excedentis ſint priuatiui omnes. ſi vero excedat tres quadrantes tangentem habet et ſinum priuatiuos; ſed cotangentem et coſinum poſitiuos. Sic et ipſe ſinus totus, cui ſinus anguli acuti, vel gibbi excedentis, inſiſtit, poſitiuus eſt; in duobus reliquis caſibus eſt priuatiuus.*

3. Quoniam in triangulis non niſi acuti et obtuſi anguli conſiderandi obueniunt, negligam poſthac gibbos; Igitur ſinus et tangentes conſtanter poſitiui, cotangentes, et coſinus indeterminati, ambigui erunt.

4, *Si anguli acuti maioris ſinus ſit* $=S$ *et coſinus* $=C$. *anguli minoris ſinus* $=s$ *et coſinus* $=c$; *dico, fore ſinum anguli ex duobus hiſce acutis compoſiti* $=\frac{Sc+Cs}{r}$, *ſinum vero reſidui* $\frac{Sc-sC}{r}$, *poſito radio* $=r$.

Fig. I. Sit angulus maior (v. fig. 1.) $=$GCF, ſinus eius $=$DF$=$S, et coſinus$=$CD$=$C. Sit porro angulus minor $=$ACG, eiusque ſinus $=$ AE$=s$, atque coſinus $=$EC$=c$, erit hoc modo angulus compoſitus $=$ACF eiusque ſinus$=$FH. Producatur iam FD in B, vt obtineantur triangula ſimilia AEC, BDC, CHK et BFH, atque inferatur.

$$\text{EC} : \text{AE} = \text{DC} : \text{BD}$$

ſive $$c : s = C : \frac{sC}{c}$$

eſt ergo $$\text{BF} = \text{BD} + \text{DF} = \frac{Sc + sC}{c}$$

inferatur dehinc denuo

$$\text{AC} : \text{EC} = \text{BF} : \text{FH}$$

ſiue $$r : c = \frac{Sc + sC}{c} : \frac{Sc + sC}{r}$$

Eſt ergo ſinus compoſiti FH$= \frac{Sc + sC}{r}$. Q. E. Primum.

Si vero in eadem figura maior angulus ſit$=$ACF, eius ſinus$=$FH$=$S, et coſinus $=$CH$=$C, minor angulus $=$ACG, eius ſinus $=$AE$=s$, et coſinus $=$EC$=c$, erit ſinus anguli reſidui$=$DF. Eſt autem

$$\text{EC} : \text{AE} = \text{CH} : \text{HK}$$

ſiue $$c : s = C : \frac{sC}{c}$$

per conſequens habetur FK$=$FH$-$HK$= \frac{Sc - sC}{c}$

atque exinde

$$\text{AC} : \text{EC} = \text{FK} : \text{EF}$$

$$r : c = \frac{Sc - Cs}{c} : \frac{Sc - sC}{r}$$

Eſt ergo ſinus reſidui $= \frac{Sc - sC}{r}$. Q. E. alterum.

5. *Datis prioribus, erit coſinus anguli compoſiti* $= \frac{Cc - Ss}{r}$ *et coſinus reſidui*$= \frac{Cc + Ss}{r}$

De.

Demonſtratio poteſt ex ſchematiſmo prioris propoſitionis peti facillima; ſed iuuat eam alio modo adornare. In primo caſu datur ſinus (§. 4) $=\frac{Sc+sC}{c}$ ergo per praecepta communia coſinus erit $\sqrt{(rr-\frac{Sc+sC}{r}\text{ quadr.})}$ $=\sqrt{(r^4-S^2c^2-2SſCc-ſ^2C^2)}:r$ eſt vero $r^4=(ſ^2+c^2)\times(S^2+C^2)=S^2s^2+S^2c^2+C^2s^2+C^2c^2$. Hoc ergo valore ſubſtituto habetur coſinus compoſiti $=$

$\frac{\sqrt{(C^2c^2-2SsCc+S^2s^2)}}{r}=\frac{Cc-Ss.}{r}$ Qui eſt coſinus compoſiti, ſicuti demonſtrandum erat: Alter vero caſus de coſinu reſidui eodem modo demonſtratur.

6. Notandum eſt de hoc et ſimilibus caſibus, eſſe $\sqrt{(C^2c^2-2SsCc+S^2s^2)}=Cc-Sſ$ non vero $\pm(Cc-Sſ)$ formula enim $Cc-Sſ$ per ſe iam eſt ambigua, et duos caſus, quos debet, contrarios perfecte in ſe continet, quippe cum et $Cc>Sſ$, et $Cc<Sſ$ eſſe poſſit, eoque ipſo formula et poſitiua et priuatiua ſit, valensque ſimul pro coſinu acuti et obtuſi anguli, qui in caſibus ſpecialibus per formulam determinantur.

6. *Sit tangens anguli acuti maioris* $=T$, *tangens minoris* $=t$. *erit ita tangens compoſiti* $=rr\frac{T+t}{\pm Tt\mp rr}$ *(ſc. pro acuto* $rr\frac{T+t}{Tt-rr}$ *, pro obtuſo* $rr\frac{T+t}{rr-Tt}$*) tangens vero reſidui* $=rr\frac{T-t}{Tt+rr}$.

Ponatur praeterea ſecans maioris $=M$, minoris $=m$, erit ex natura ſinuum et tangentium ſinus anguli maioris

ioris $=\frac{rT}{M}$ eiusque coſinus $\frac{rr}{M}$; porro ſinus minoris $=\frac{rt}{m}$. eiusque coſinus $=\frac{rr}{m}$. ex hiſce formatur (per §§ 4 et 5.) ſinus arcus compoſiti $=rr\frac{T+t}{Mm}$ eiusq; coſinus $r\frac{rr-Tt}{Mm}$; item ſinus reſidui $=rr\frac{T-t}{Mm}$ et coſinus $=r\frac{rr+Tt}{Mm}$. Cum igitur ſit vt coſinus ad ſinum, ita radius ad tangentem (poſito radio poſitiuo ſi coſinus poſitiuus et pro acuto fuerit; priuatiuo autem ſi ſecus (§. 2):) habetur Tangens compoſiti $=rr\frac{T+t}{\pm Tt\mp rr}$ et reſidui $=rr\frac{T-t}{Tt+rr}$. Q. E. D.

7. *Quoniam tangens eſt ad radium vti radius ad cotangentem, erit cotangens compoſiti* $=\frac{rr-Tt}{T+t}$ *et reſidui* $=\frac{Tt+rr}{T-t}$ (vbi de cotangente compoſiti notandum, eam pro acuto valere ſi ſit $rr>Tt$, viciſſim vero pro obtuſo:)

8. *Sit maioris anguli acuti ſinus* $=$S, *coſinus* $=$C, *ſinus anguli minoris* $=s$, *coſinus* $=c$, *ſit praeterea ſemiſummae* (ex maiore et minore arcu formatae) *ſinus* $=$A, *coſinus* $=$B *et tangens* $=$Q; *dico eſſe* $\frac{S-s}{c-C}=\frac{c+C}{S+s}=\frac{B}{A}=\frac{r}{Q}$ (vbi $r=$radio)

Fig. II. In figura ſecunda ſit arcus maioris ſinus $=$DE$=$S, et coſinus $=$DH$=$C, minoris arcus ſinus ſit $=$BC$=s$, coſinus $=$CH$=c$. Prolongetur maior ſinus in O, et BM fiat normalis ad EO, vt habeatur KO$=$S$+s$, KE$=$ S$-s$, KM$=c+$C et KB$=c-$C. Erit quoque arcus OB aequalis ſummae arcuum propoſitorum, huius ſumatur dimidium AB$=$AO cuius formetur tangens BI$=$Q. Sinus AL$=$A et coſinus HL$=$B. Hoc modo

do

do obtinentur triangula rectangula MKO, EKB, HBI et HLA omnia ſimilia, fiet proinde

$$\left\{\begin{array}{l} KE : KB = KM : KO = LH : LA = BH : BI \\ (S-s):(c-C)=(c+C):S+s)=B : A = r : Q \end{array}\right\}$$

Q. E. D.

9. *Retentis prioribus, fiat inſuper ſinus ſemidifferentiae* $= a$, *eiusque coſinus* $= b$ erit $\frac{S-s}{2a}=\frac{c+C}{2b}=\frac{B}{r}$ et $\frac{S+s}{2b}=\frac{c-C}{2a}=\frac{A}{r}$.

In praecedente figura eſt chorda $EB = 2a$, hoc eſt, aequalis duplo ſinui ſemidifferentiae; chorda vero MO eſt $= 2b$, ſiue aequalis duplo coſinui ſemidifferentiae, arcus enim MNO (cui ſubtenditur chorda MO) eſt = arcui NOP + arc. NM − arc. PO, vel, (quia PB = NM et PE = PO) = arc. NOP + arc. PB − arc. PE. et quia PB − PE = arc. BE fiet MNO = NOP − BE, eſt et praeterea NOP = 180° = ſemicirculo, et BE = differentiae arcuum, fiet itaque $\frac{1}{2}$ MNO − $\frac{1}{2}$ BE = 90° − ſemidifferentia arcuum, cuius conſequenter ſinus duplus eſt = chordae MO. Iam ob ſimilitudinem triangulorum ante (§. 8.) allegatorum eſt *Fig. II.*

$$\left\{\begin{array}{l} KE : BE = KM : MO = HL : AH. \\ (S-s) : 2a = (c+C) : 2b = B : r \end{array}\right\}$$

item

$$\left\{\begin{array}{l} BK : BE = KO : MO = AL : AH. \\ (c-C) : 2a = (S+s) : 2b = A : r \end{array}\right\}$$

Q. E. D.

10. *Poſitis quae ſupra §. 8. ponebantur ſitque*

praeterea tangens ſemidifferentiae $=q$; *dico eſſe* $\frac{S+s}{c-C}=\frac{c+C}{S-s}=\frac{r}{q}$ et $\frac{S-s}{S+s}=\frac{q}{Q}$.

Eſt enim in antecedente figura $BI=Q$ et $BR=q$, itemque triangula HBR, BOK, et EKM ſimilia, vti et ſimilia ſunt triangula MKO et HBI. ex quibus ſequentes oriuntur analogiae

$$\left\{\begin{array}{l} KO : BK = KM : EK = BH : BR \\ (S+s):(c-C)=(c+C):(S-s)=r : q \end{array}\right\}$$

item

$$\left\{\begin{array}{l} EK : KO = BR : BI \\ (S-s):(S+s)= q : Q \end{array}\right\} \text{Q. E. D.}$$

11. Si minor arcus in hac praecedente propoſitione euaneſcat, erit $c=r$, $s=0$ et $q=$ tangenti dimidii arcus maioris (qui nunc ſolus adeſt) per conſequens habetur $\frac{S}{r-C}=\frac{r+C}{S}=\frac{r}{q}$.

12. *Maneant ſuperiora* §. 10. *dico quoque eſſe* $\frac{c+C}{c-C}=\frac{rr:b}{Q}=\frac{rr:Q}{q}$, *hoc eſt, differentiam coſinuum eſſe ad ſummam coſinuum vti tangens ſemiſummae adeo tangentem ſemidifferentiae, vel vti tangens ſemidifferentiae ad cotangentem ſemiſummae.*

Demonſtratio poſſet ex figura priorum propoſitionum deſumi, ſed lubet eam hoc modo inflectere: Quoniam $\frac{S-s}{c-C}=\frac{c+C}{S+s}$ per §. 8. erit quoque (ducendo vtrumque membrum in $\frac{S+s}{c-C}$) $\frac{(S-s)(S+s)}{(c-C)(c-C)}=\frac{c+C}{c-C}$ ſed ob $\frac{S-s}{c-C}=\frac{r}{Q}$ (§. 8.) et $\frac{S+s}{c-C}=\frac{r}{q}$ (\`. 10.) erit ſubſtitutis aequalibus $\frac{rr}{qQ}=\frac{c+C}{c-C}=\frac{rr:q}{Q}=\frac{rr:Q}{q}$. Q. E. D.

13. Euaneſcente minore arcu, reſtabit ſolus maior

ior qui proinde ſimul eſt et ſumma et differentia, ipſiusque dimidium eſt et ſemiſumma et ſemidifferentia, hoc igitur caſu fiet $c = r$, et $Q = q$ adeoque $\frac{r+C}{r-C} = \frac{rr}{QQ} = \frac{rr:Q}{q}$.

14. In propoſitionibus hactenus allatis non niſi acuti anguli ſuppoſiti ſunt, ſed facili opera eae accommodantur quoque obtuſis angulis, ſi nimirum coſinus et cotangentes ſigno priuatiuo afficiantur (§§. 2, 3.) Sic ex. gr. ſi maior angulus obtuſus ſit, erit loco C ſcribendum $-C$, et ſinus compoſiti (§. 4.) habebitur $= \frac{Sc-sC}{r}$.

15. Propoſitiones ab articulo 8. vsque ad 13. inſeruiunt regulis trigonometricis decurtandis et ad concinniorem formam redigendis, quod exemplis idoneis, data occaſione, oſtendam, vnicum nunc ſufficit. In elementis ſphaericorum Wolfii §. 146. habetur theorema cuius ope ex datis tribus lateribus trianguli ſphaerici obliquanguli inueniuntur anguli; in hoc theoremate formanda venit ratio inter differentiam et ſummam ortas ex coſinibus crurum, quae vero, ſi coſinus logarithmici dentur, difficulter exprimitur; aſt facilis fit eius formatio, ſi loco crurum ſumatur eorum ſemiſumma et ſemidifferentia, illius enim tangens, atque huius contangens conſtituunt eandem rationem (per §. 12.) Hoc igitur modo calculus logarithmicus contrahitur in regula Wolfiana quae ſic neperianae ſimilis fere facta eſt, et eadem cum illa facilitate gaudet, imo levi attentione perſpicitur unam harum regularum poſſe transmutari in alteram.

16. Habent praeterea dictae propoſitiones uſum non contemnendum in iis caſibus, ubi, datis duorum numerorum logarithmis, inveniendus eſt logarithmus

ſummae vel differentiae datorum numerorum, idque per ſolum canonem ſinuum logarithmicum. Huic uſui maxime inſeruit propoſitio ſub articulo 9. quae in has transformari poteſt ſequentes: $c + C = \frac{2Bb}{r}$ $S + s = \frac{2Ab}{r}$, $c - C = \frac{2Aa}{r}$ et $S - s = \frac{2Ba}{r}$. Ex ſolo enim intuitu harum formularum patet, in illis ſummas et differentias duarum quantitatum aequiparari aliis, quae per canonem ſinuum datae, et logarithmis ſimul adaptatae ſunt, quippe quae conſtant ex ſolis in ſeſe mutuo ductis factoribus datis; Habeantur itaque dati logarithmi pro logarithmis ſinuum aut coſinuum, quorum ex canone excerpantur arcus, arcuum formetur et ſemiſumma et ſemidifferentia, atque pro hiſce denuo excerpantur logarithmi competentes, quae ſecundum formularum antecedentium tenorem ſibi mutuo addantur et ſubtrahantur, vt obtineatur quaeſitum. Exempla non addo, quia in ſequentibus eorum occaſio erit. Iuuat potius explicare hic uſum propoſitionis ſub §. 13. quem habet in ſolutione *problematis de triangulo rectilineo cuius dantur duo latera cum angulo intercepto, et quaeruntur anguli reliqui*: Ponamus maius latus datum $= r$, minus vero $= c$, tangentem ſemiſummae angulorum quaeſitorum $= t$ tangentem vero ſemidifferentiae quaeſitae $= y$, erit per notam regulam $\frac{r+c}{r-c} = \frac{t}{y}$. Nunc habeatur maius latus pro radio, minus pro coſinu alicuius anguli qui excerpatur ex canone, eiusque dimidii tangens denuo excerpatur quae vocetur Q erit itaque (per §. 13) de-

$\frac{r+c}{r-c} = \frac{rr}{QQ}$, ergo etiam $\frac{rr}{QQ} = \frac{t}{y}$ et $y = \frac{tQQ}{rr}$ ſiue per logarithmos rem exprimendo $ly = lt + 2lQ - 2lr$. Dabo exemplum, vtar autem logarithmis neperianis vbi radii logarithmus eſt $= 0$. Sit igitur logarithmus lateris maioris $= - 50899$, logar. minoris $= + 460$, angulus interceptus $= 126°, 41'. 20''$ et proinde ſemiſumma angulorum quaeſitorum $= 26°, 39'. 20''$. Iam conuertatur minus latus in coſinum ſimplici analogia hac; vti maius latus ad minus, ita radius ad coſinum deſideratum; quae per logarithmos ſic efficitur.

log. lat. min. — — — 460
log. lat. maioris — — 50899

Coſinus — — — 51359 — — 53°, 14′, 55″
26 37 . 27½ tang. = 69056

duplum = 138112
tang. ſemiſummae = 68920

Semidifferentia quaeſita 7°. 11′. 22″ — — — 207032
Semiſumma — — — 26. 39. 20.
angulus quaeſitorum vnus: 19. 27. 58.
— — — alter — — — — 33. 51 42.

Deſumptum eſt exemplum ex tabulis rudolphinis pag. 68. vt conſtaret artificii huius vſus in calculis aſtronomicis. Incidenter annoto, coſinum ex minore latere oriundum (51359) eſſe ipſam proportionem interuallorum, vti Keplerus vocat, duplam vero tangentem (138112) vocari a Keplero et aliis logarithmum indicis.

Fig. III. 17. *In triangulo rectilineo* ABC, *datis lateribus, ſcilicet* AB$=$A, AC$=a$ et BC$=b$, *poſitoque radio* $=$r. *erit coſinus anguli ad* A$=r\frac{AA+aa-bb}{2Aa}$.

Demiſſo enim perpendiculo BD, habetur ſegmentum AD$=\frac{AA+aa-bb}{2a}$ (ſicuti ex elementis geometriae conſtat). Atqui, vti AB ad AD, ita ſinus totus eſt ad coſinum anguli ad A, ergo coſinus ille eſt $=r\frac{AA+aa-bb}{2Aa}$. Q. E. D.

Notandum vero eſt coſinum eſſe poſitiuum ſi fuerit $(AA+aa)>bb$, atque ita valere pro acuto; valere autem pro obtuſo ſit fuerit $bb>(AA+aa)$ patet id ex §. 2.

18. Theorema hoc in gratiam ſequentium adduxi, vbi eius praecipuus vſus erit; lubet tamen, hac occaſione data, exemplo oſtendere quomodo tales regulae logarithmis tractari debeant. Sit igitur log. A$=$51083. $la=40547$ et $lb=28768$. eſt ergo log. $A^2=102166$, $la^2=81094$ et $lbb=57536$, quaeratur ab initio log. (A^2+a^2), ope §. 9. ex quo adhibeatur aequatio $c+C=\frac{2Bb}{r}$, habeantur iam logarithmi quantitatum A^2 et a^2 pro coſinibus, quorum excerpantur arcus; vti ſequitur.

arc.

	arc. $A^2 = 65°$	54'.			
	arc. $a^2 = 63.$	36.	45''		
Summa -	132.	30.	45.		
Semiſumma -	66.	15.	$22\frac{1}{2}$	- - coſin. - -	90970 = B
Semidifferentia - - -	2	38	$37\frac{1}{2}$	- - coſin. - -	107 = b
					91077
					69315 = l.2.
					$l(A^2 + a^2) = 21762$

Deinde denuo habeantur et $(A^2 + a^2)$ et b^2 pro coſinibus, et pro earum differentia inuenienda conſideretur aequatio $c - C = \frac{2Aa}{r}$, (ex. §. 9.) eſt ergo

arc. $(A^2 + a^2)$	= 36°.	26',	40''.		
arc. b^2	= 55.	46,	15.		
Summa =	92	12	55		
Semiſumma =	46	6	$27\frac{1}{2}$	- - ſinus	32762 = A
Semidiff. - - =	9	39	$47\frac{1}{2}$	- - ſinus	178462 = a
					211224
					69315 = $l2$.

log. $A = 51083$

log. $a = 40547$

91630

l. 2 = 69315

l. 2Aa = 22315

$l.(A^2 + a^2 - b^2) = 141909$

log. 2Aa = 22315

ang. ad A = 72°. 23'. 51''. = 119594

Tentanti hunc calculum pateſcet eum poſſe contrahi, ſed hic volui ductum regularum ſequi, vt exemplum eo perfectius ſit.

18. *Datis in triangulo ſphaerico* ABC *tribus lateri-* Fig. IV.

teribus quadrante minoribus, poſitisque ſinu cruris AB $=$S, *coſinu eiusdem* $=$C, *ſinu cruris* BC$=$*ſ et coſinu*$=$c, *coſinu baſeos* AC$=$*q, et radio*$=$*r*; *dico coſinum anguli ad* B *fore*$=\frac{rq-Cc}{Ss}r$.

Fig. V. Subtendantur lateribus ſuae chordae AB, AC et BC ab angulis ducantur radii ad centrum ſphaerae D, eoque ipſo pyramis formetur triangularis, cuius hedrae ADB, ADC et BDC ſunt triangula aequicrura quolibet crure exiſtente $=r$. anguli hedrarum ad D, (ſiue vertices triangulorum aequicrurorum) dati ſunt, ſubtenduntur enim ab arcubus datis, nimirum ipſis trianguli dati lateribus. Iam ad lineam BD (ab angulo quaeſito ad centrum ſphaerae ductam) applicentur duae normales BE et BF, exiſtentes in planis hedrarum ABD et BDC continuatis, et per conſequens attingentes arcus trianguli dati AB et BC; productae hae lineae in E et F, (vbi cum lineis AD et DC protenſis concurrunt) ſunt datae ob arcus AB et BC datos, quorum tangentes ſunt; angulus vero EBF ille ipſe eſt quem intercipiunt crura trianguli ſphaerici dati AB et BC, et quem inuenire oportet, et cuius coſinus nobis nunc ſit $=y$. Praeterea ob datos ſinus et coſinus arcuum AB et BF erit (per regulas tangentium et ſecantium communes) tangens BE$=\frac{rS}{C}$ et ſecans ED$=\frac{rr}{C}$. Item tangens BF$=\frac{rs}{c}$ et ſecans DE$=\frac{rr}{s}$ hiſce datis, poſitaque EF$=z$, formari poteſt aequatio ex tribus trianguli DEF lateribus eiusque angulo ad D dato (eſt enim eius coſinus$=q$) idque per theorema ante (§. 17) demonſtratum: Nimirum fiet

I --

$$1 \text{ - - } q = r\,\frac{\frac{r^4}{CC}+\frac{r^4}{cc}-zz}{\frac{2r^4}{Cc}}$$

qua aequatione decenter reducta, habetur

$$2 \text{ - - } zz = rr\,\frac{rrCC-2rqCc+rrcc}{CCcc} = \text{EF quadr.}$$

atque ita deuentum eſt ad triangulum EFB in quo iam omnia dantur latera, quibus (vi §. 17.) determinatur coſinus anguli quaeſiti ad B ſequente aequatione

$$3 \text{ - - } y = \frac{\frac{rrSS}{CC}+\frac{rrss}{cc}-rr\frac{rrCC-2rqCc+rrcc}{CCcc}}{\frac{2rSs}{Cc}}$$

ſiue

$$4 \text{ - - } y = \frac{rrSScc+rrssCC-r^4CC+2r^3qCc-r^4cc}{2rSCsc}$$

et quia $rrSScc-r^4cc = rrcc(SS-rr) = -rrccCC$
item quia $rrssCC-r^4CC = rrCC(ſſ-rr) = -rrccCC$
fiet

$$5 \text{ - - } y = \frac{2r^3qCc-2rrccCC}{2rSCſc} = r\frac{rq-Cc}{Ss}. \quad \text{Q. E. D.}$$

19. De hac regula notandum eſt, eam facere coſinum poſitiuum ſi fuerit $rq > Cc$ et per conſequens angulum quaeſitum acutum: ſi vero fuerit $rq < Cc$, fore coſinum priuatiuum qui valet pro angulo obtuſo (qui acuto ſuo deinceps eſt). Idem quoque obtinet, ſi crura quadrante maiora ſint, licet enim tum eorum coſinus priuatiui ſint ($-C$ et $-c$) factum tamen Cc poſitiuum eſt aeque ac factum coſinuum poſitiuorum. Si ſola baſis ſit quadrante maior, adeoque eius coſinus $= -q$ erit $y = -r\frac{rq+Cc}{Sſ}$ ex

quo patet, hoc caſu angulum quaeſitum ſemper eſſe obtuſum. Si alterutrum crus fuerit quadrante maius, erit $y = + r\frac{rq+Cc}{Ss}$ et proinde angulus quaeſitus ſemper acutus. Eodem modo in aliis caſibus praeſciri poteſt cuius ſpeciei futurus ſit angulus quaeſitus.

20. Caeterum praxis huius regulae logarithmica facilis eſt, obſeruatis artificiis antea (§. 16 et 18) oſtenſis; eam impraeſentiarum vno alteroue exemplo illuſtrabo. Sit igitur crus AB$=69°$, crus BC$=47°$ et baſis AC$=34°$. erit proinde log. S$=6873$, $ls=31286$ $lC=102620$, et $lc=38273$. logarithmo coſinus baſeos non indigemus. Nunc formetur log. $(rq-Cc)$ ope aequationis $c-C=\frac{2Aa}{r}$ deſumtae ex §. 9. fiat nimirum

$lC = 102620$
$lc = \ \ 38273$

$l(Cc)=140893$ - - eius arcus	=	75°,	51′	12″.		
arcus ipſius $l(rq)$ - - -	=	34	0	0		
Summa - -		109	51	12		
Semiſumma - -		54	55	36	- ſinus -	20038
Semidiffer. - - -		20	55	36	- - - -	102953

lS	=	6873
ls	=	31286
l2	=	69315
$l(\frac{Ss}{2})$	=	107474

log $(\frac{rq-Cc}{2})$	=	122991
$l\frac{Ss}{2}$	=	107474
log. Coſinus quaeſiti	=	15517
angulus ad B	=	31°. 6′.

hic

hic angulus eſt acutus, quia in praeſenti caſu habetur $rq > Cc$. Alterum exemplum hoc eſto: crus AB $= 46°$, crus BC $= 57°$. baſis AC $= 95°$. in hoc exemplo angulus quaeſitus erit obtuſus (per §. 19) eſt vero praeterea $lS = 32942$ $lC = 36434$ $ls = 17594$ $lc = 63503$. hinc fit

lC = 36434
lc = 63503
l(Cc) = 99937. cuius arcus = 68° 24′ 5″
arcus ipſius $l(rq)$ = 95 0 0

Summa = 163 24 5
Semiſum. = 81 42 $2\frac{1}{2}$ ſinus = 1053
Semidiff. = 13 17 $57\frac{1}{2}$ ſinus = 146953

lS = 32942
lS = 17594
l2 = 69315
$l\frac{Ss}{2}$ = 119851

$l\frac{rq-Cc}{2}$ = 148006
$l\frac{Ss}{2}$ = 119851
coſinus quaeſitus = 28155
angulus reſpondens = 41° 0′ 30″
cui deinceps = 138 59 30
qui eſt angulus quaeſitus.

Ita in reliquis caſibus procedendum eſt quoque; ſolum hoc, vt moneam, reſtat: quando alterutrum crus obtuſum eſt, mutatur quoque ſignum ipſius Cc, nam in formula pro $-Cc$ fit hoc caſu $+Cc$. Igitur logarithmus ipſius Cc fit logarithmus alicuius coſinus obtusanguli, qui in prioribus exemplis acutangulus fuit.

21. Poſſem regulam logarithmis adaptatam verbis

D 2

bis efferre quibus calculator dirigeretur; aſt quia prolixior eſt quam altera mox tradenda, effatu indignam cenſeo. Brevior eſt nulliſque obnoxia cautelis noua mox explicanda et ex priore ita deriuanda: Quoniam coſinus anguli quaeſiti $= r\frac{rq-Cc}{sſ}$ erit eius ſinus verſus $= r\frac{sſ-rq+Cc}{sſ}$, ex elementis porro conſtat ſinum verſum inter et diametrum ($2r$) eſſe mediam proportionalem aequalem chordae dicti anguli quaeſiti, huius ergo chordae quadratum habetur ducendo $2r$ in $r\frac{sſ-rq+Cc}{sſ}$ quod proinde eſt $= 2rr\frac{sſ-rq+Cc}{sſ}$; dimidia haec chorda eſt ſinus anguli quaeſiti dimidii, eius ergo quadratum eſt prioris quadrati ſubquadruplum et per conſequens $= rr\frac{sſ+Cc-rq}{2sſ}$. Hoc quadratum mutari poteſt in hanc formam $rrr\frac{\frac{sſ+Cc}{r}-q}{2sſ}$ eſt autem $\frac{sſ+Cc}{r} =$ coſinui differentiae crurum (per §. 5.) quem breuitatis cauſa ponam $= Q$. igitur quadratum ſinus dimidii anguli quaeſiti fit $= r^3\frac{Q-q}{2sſ}$, formetur porro ex differentia crurum et baſi ſemiſumma et ſemidifferentia, ponaturque illius ſinus $= A$, huius $= a$, ita fiet per §. 9. $Q-q = \frac{2Aa}{r}$ quo valore in praecedente formula ſubſtituto, habetur quadratum ſinus anguli quaeſiti dimidii $= rr\frac{Aa}{sſ}$; quae quidem regula facillima eſt et breuiſſima, qua nimirum duplus logarithmus ſinus pro angulo quaeſito dimidio inuenitur, quo dato, integer angulus latere nequit. Ceterum hanc ipſam regulam Neperus in canone mirifico (pag. 48) tradidit dudum, cuius demonſtrationem ego meo more hic concinnare volui.

22.

22. Ex theoremate ſuperiori (§. 18.) omnia reliqua trigonometriae ſphaericae praecepta deduci poſſunt, tam ea quae de obliquangulis praecipiunt, quam quae de rectangulis. Iucunda maxime eſt deriuatio regulae pro inueniendis lateribus ex datis angulis. Sed talia non ſunt huius loci, nolo enim actum agere; in eo ſum potius vt iactis his fundamentis noua inaedificem theoremata, quorum in doctrina aſtronomiae ſphaerica aliquis vſus eſſe poteſt. Ea vero praeſenti ſcripto excludo ne id excreſcat nimium, finem igitur imponat ſequens problema, quod in medium ideo produco, quia pluries mihi ad illud prouocandum erit.

23. *Datis in triangulo rectilineo duobus cruribus cum angulo intercepto, inuenire angulos reliquos.*

Sit in triangulo ABC crus maius AB$=$A, crus minus AC$=a$, ſinus acuti anguli BAC$=p$ eiusque coſinus $=q$. ducto perpendiculo BD erit vt ſinus totus ad coſinum anguli ad A, ita latus AB ad ſegmentum AD, adeoque in praeſenti caſu, $=\frac{Aq}{r}$ ſic fit alterum ſegmentum DC$=\frac{ra-Aq}{r}$. Eſt etiam vt ſinus totus ad ſinum anguli ad A, ita latus AB ad perpendiculum BD, quod exinde fit$=\frac{Ap}{r}$. Tandem inferendo, vt DC ad DB ita ſinus totus eſt ad tangentem anguli ad C, inuenitur tangens dicti anguli$=\frac{rAp}{ra-Aq}$. vbi notandum, angulum hunc fore obtuſum ſi ſit $ra<Aq$. Eodem quoque modo tangens anguli minoris ad B (qui minori cruri opponitur) inuenitur $=\frac{rap}{ra-Aq}$. Inuenitur praeterea per vulgaria trigonome- *Fig. III.*

triae praecepta anguli maioris ad C ſinus $= \frac{pA}{\sqrt{(AA - 2Aaq:r + aa)}}$ eiusque coſinus $= \frac{Aq - ra}{\sqrt{(AA - 2Aaq:r + aa)}}$ itemque ſinus anguli minoris $\frac{pa}{\sqrt{(AA - 2Aaq:r + aa)}}$ eiusque coſinus $= \frac{rA - aq}{\sqrt{(AA - 2Aaq:r + aa)}}$; in hiſce formulis omnibus pro q ponendum eſt $-q$. Si angulus datus interceptus fuerit obtuſus.

DE TRANSFORMATIONE SERIERVM

Auctore

C. G.

M. Mart. 1727.

TRansformari ſeriem dico, cum in aliam eiusdem ſummae conuertitur; ex quo patet ad transformationem datae ſeriei hoc requiri, vt, ſi ſinguli termini ſeriei transformandae A. auferantur ex ſingulis terminis ſeriei transformatae B. ſinguli termini reſidui transeant in nouam ſeriem C$=$B$-$A. cuius ſumma$=o$. E contrario, ſi ſeries quaecunque C. cuius ſumma ſit$=o$. addatur ad ſeriem transformandam A. prodibit ſeries transformata B.

Sed eiusmodi ſeries C. cuius ſumma ſit$=o$. infinitis modis obtineri poteſt ex ſubtractione vnius ſeriei ab alia

alia, ſi vtriusque ſummae ſint aequales. Conſideremus exempli cauſa duas ſeries

D . . . $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+$etc.
cuius formula generalis eſt $\frac{1}{x(x+2)}$

E . . . $\frac{3}{8}+\frac{3}{24}+\frac{3}{48}+\frac{3}{80}+$etc.

cuius formula generalis eſt $\frac{3}{4x(x+1)}$
ſummam vero vtriusque conſtat eſſe eandem $\frac{3}{4}$. quod ſi iam ſinguli termini vnius ſeriei auferantur ex ſingulis terminis alterius, reſidua erit tertia ſeries C $= \pm$ D $\mp$ E. cuius formula generalis eſt $\left(\frac{\pm 1}{x(x+2)} \mp \frac{3}{4x(x+1)}\right)$
$= \frac{\pm x \mp 2}{4x(x+1)(x+2)}$ ſumma vero totius ſeriei $=o$. quamob rem formula $\frac{\pm ax \mp 2a}{4x(x+1)(x+2)}$ ubi *a*. ſit numerus quicunque, dat ſeriem quae addita ad quamcunque transformandam A. infinitis modis exhibebit transformatam B. Similiter ex formulis $\frac{11}{18x(x+1)}$ et $\frac{1}{x(x+3)}$ quarum vtraque dat ſeriem $=\frac{11}{18}$. deducitur formula ſeriei C.
$\frac{\pm 7ax \mp 15a}{x(x+1)(x+3)}$ cuius ſumma $=o$. atque iisdem veſtigiis inſiſtendo reperientur $\frac{\pm 23ax \mp 52a}{x(x+1)(x+4)}$ et $\frac{\pm 163ax \mp 385a}{x(x+1)(x+5)}$ etc. quarum ſummae itidem $=o$.

Sit verbi gratia ſeries transformanda huius formae $\frac{1}{(4x-3)(4x-1)}$ (quam conſtat exprimere aream ſemicirculi cuius diameter $=1$.) addatur huic ſeries

C . . . $\frac{\pm ax \mp 2a}{x(x+1)(x+2)}$ cuius ſumma, vt ſupra demonſtratum fuit, eſt $=o$. erit ſeries transformata B.

±16

$$\frac{(\pm 16a + 1)x^3 + (3 \mp 48a)x^2 \pm 35ax \mp 6a}{x(x+1)(x+2)(3x-3)(4x-1)}$$

quae eandem ſemicirculi aream exprimet ſumto a. numero conſtante quocunque, ex cuius exempli conſpectu facile reliqua ſimilia intelliguntur.

Interea non eſt neceſſe vt ſeries illa C. cuius ſumma requiritur $= 0$. ſumatur ex illis in quarum formula exponentes poteſtatum ſint numeri conſtantes, quales fuere de quibus hactenus dixi, ſed ſumi etiam poſſunt *exponentiales* quaecunque, hoc eſt, in quarum formula x. ingreditur exponentem poteſtatis, ita ſi ex ſerie

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ etc.

cuius formula eſt $\frac{1}{x^2 + x}$ auferatur ſeries

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ etc.

cuius formula eſt 2^{-x}. ſumma vero vtriusque $= 1$. reſidua ſeries et omnes eius multiplae quas haec formula comprehendit

$$\frac{2^{-x} a - ax^2 - ax}{2^{-x}(x^2 + x)}$$

erunt $= 0$.

Quem ad modum vero ſumma ſeriei transformandae A. manet eadem, ſiue ei addatur ſeries alia C. cuius ſumma $= 0$ ſiue ipſa A. multiplicetur per ſeriem D. cuius ſumma $= 1$. ita ex hac conſideratione ad alteram eamque generalem methodum transformationis peruenimus. Sit ſeries quaecunque transformanda

A . . . $a + b + c + d +$ etc.

ſumatur alia quaeuis

D.

$$D \quad \ldots \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}$$

ubi α. β. γ. etc. ſint quantitates conſtantes quaecunque, modo terminus eius vltimus vel infiniteſimus nullus ſit vel infinite paruus, dico ſeriem A. transformari in

$$\begin{array}{llllll} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \\ B \ldots & (a+b)+ & (c+d)+ & (e+f)+ & (g+h)+ & \text{etc.} \\ & a+\alpha & (c-a)\alpha & (e-c)\alpha & (g-e)\alpha & \\ & & a+\beta & (c-a)\beta & (e-c)\beta & \\ & & & +a\gamma & (c-a)\gamma & \\ & & & & +a\delta & \end{array}$$

erit enim ſeries B. productum ex ſerie A. multiplicata per

$$D \ldots 1+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\text{etc.}=1.$$

Sit exempli cauſa data ſeries

$$A \ldots 1-m+m^2-m^3+m^4-m^5+\text{etc.}$$

ſi ſumatur $\alpha=\frac{m^2+m-1}{m+2}$.

$$\beta=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^2}=\frac{\alpha}{m+2}$$

$$\gamma=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^3}=\frac{\beta}{m+2}\text{etc.}$$

Series A. transformabitur in

$$B \ldots \frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+2)^3}+\frac{1}{(m+2)^4}+\text{etc.}=\frac{1}{m+1}$$

Si vero ponatur $\alpha=\frac{m^2-m+1}{m}$. $\beta=\frac{-\alpha}{m}$. $\gamma=\frac{-\beta}{m}$. etc.

Series A tranſibit in

$$B \ldots 1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^3}+\text{etc.}=\frac{1}{m+1}$$

Scio quidem pleroſque ſtatuere ſi in ſerie A quantitas *m.* ſit maior vnitate ſeriem totam ex praepoſtera diuiſione $\frac{1}{1+m}$ oriri neque adeo huic quantitati aequalem eſſe, ſed etiam ſi iſte modus exprimendi quantitatem finitam per ſeriem infinitam numerorum alternatis ſignis creſcentium neſcio quid inſoliti prae ſe ferat, non tamen video cur omnino reiiciendus ſit, cum ex hoc quod dedimus exemplo appareat eiusmodi ſeries tractabiliores fieri atque in alias aequales terminorum continuo decreſcentium commutari poſſe; adde, quod iſtae ſeries (in quibus termini creſcunt alternatis ſignis) non ſemper ex praepoſtera diuiſione, ſed aliis etiam modis proueniant de qua re alio loco dicemus. Ceterum hac noſtra methodo data quuecunque ſeries A. transformari poterit in aliam B. ea lege vt ab initio habeat terminos quoscunque datos, nam ex quantitatibus α. β. γ. etc. tot poterunt determinari per conditionem problematis quot termini dati fuerint in ſerie B adeo vt haec methodus non ſolum ad caſus transformationis infinitos, ſed ad omnes poſſibiles perducat.

DE

DE BILANCIBVS
ET NOVIS INVENTIS STATICIS

Auctore

Ioh. Georg. Leutmann.

I.

Bilancium γνωσις Mathematicum decet, γενεσις Mechanico debetur. Vtraque et in Theoria et in praxi ſundatur, ita, vt hic theoria absque praxi inanis, praxis absque theoria inſufficiens reputanda ſit. *M. Inn. et ſeqq.* 1727.

2. Non loquor de bilancibus vulgaribus atque craſſioribus, minori ακριβεια et attentione elaboratis, quarum vitia facile dignoſcuntur et diſcernuntur ab accuratioribus, leui adhibito examine. Deſudant in his elaborandis opifices, cognitione ſuperficiali imbuti, fundamentalis rudes. Subtiliores et accuratiores mihi curae ſunt. Illarum ſtructura ad leges mechanicas examinanda, vitia detegenda, et corrigenda, et tandem leges dandae, ad quarum ductum conſtruantur, vt perfectior prodeat Machina, vſibus aptior.

3. Maxime vero ea, quae ad ſtructuram bilancium docimaſticarum et trutinarum pertinent, explicabo, et quomodo examina earum rigidiora inſtituenda; deinde noua inuenta addam, et diſcrimen monſtrabo

 inter

inter haec et bilances iam notas atque vſitatas, tandem ea, quae ad εγχειρησεις ſpectant, expoſiturus. Videamus itaque, quousque ad maximam ακριβειαν per leges Mechanicas, propriam experientiam ſeu praxin et operam manuariam curatiorem progredi licuit.

Cap. I.

De bilancium constructione et correctione.

Reg. I. *Bilancis ſcapi ſeu iugi brachia, vt exactiſſime eandem habeant longitudinem neceſſe eſt.*

4. Putant rerum non ſatis gnari ſcrupuloſam dimenſionem brachiorum bilancium non adeo eſſe neceſſariam, ſed qualemcunque ſufficere, modo aequilibrium vtrique ſit datum. Sed laborant hi praeiudicio, non conſiderantes leges de vecte. Non enim corrigitur per aequilibrium brachiis datum praepondium a longiore vectis brachio dependens; ſed vitium ſe prodit, quando duo pondera ad eiusmodi bilancem aequantur, et deinde commutantur, ita vt ſiniſtrae lanci imponatur pondus in dextra aequilibratum, tunc cognoſcitur brachium longius, per quod praeponderat pondus impoſitum ante commutationem aequilibre cum altero.

5. Criterium itaque atque proba, vti iam dictum in eo conſiſtit, vt duo pondera ſimul in binis lancibus librentur, et reddantur aequalia; deinde commutentur pondera, et obſeruetur exacte, vtrum aequalitatem ſint conſer-

conſeruatura. Si enim praeponderat alterutrum, indicium eſt inaequalitatis brachiorum. Itaque ex commutatione lancium atque oneris ſaepius iterata innoteſcit iuſta proportio brachiorum.

6. Corrigitur vulgariter inaequalitas brachiorum, ſi extrema brachiorum auriculis *a* inſtruantur, quarum inflexione et reflexione tandem aequilibrium brachiis conciliatur. *Tab. II.*

7. Vitium itaque eſt in illarum bilancium ſcapis, quorum extrema tantum foraminulo et clauo traiecto gaudent ad appendendas lances *b*, numquam enim hoc modo ipſis exactitudo aequalitatis conciliari poteſt, id quod in maioribus non adeo percipitur; in minoribus docimaſticis vero magna incommoda atque errores parit. Dimidietur enim duarum drachmarum una, dimidium eius iterum in duas partes aequales diuidatur, idque ſaepius cum quouis dimidio continuetur, tandem omnia illorum ponderum dimidia coniunctim vni lanci imponatur, et vltimum dupletur, altera lanx recipiat vnam illam drachmam primo adhibitam, tunc vitium bilancis facile cognoſcetur, ſi drachmae pondus vel non attingunt, vel illud excedunt, cui tamen aequalia eſſe debent.

8. Quandoquidem vero in maioribus ferreis bilancibus haec incuruatio ſeu flexio non niſi ignita trabis extremitate fieri poteſt, ex quo de grauitate materiae aliquid ſemper decedit, ita vt iuſta proportio haberi nequeat grauitatis aequalis brachiorum; in minoribus vero bilancibus e. gr. docimaſticis facile frangantur auriculae

 flexio-

flexione ſaepius vexatae : De nouo inuento aliquo ſolicitus fui, et illud feliciter me expediuiſſe autumo, duobus modis, quorum prior bilancibus maioribus et mediis, alter minoribus et docimaſticis egregie conuenit, atque ad ακριβειαν conducit.

9. Prior modus talis eſt : Incuruentur ſcapi extrema ſurſum in A et deinde ad lineam ſcapo parallelam denuo flectantur. Prodeant extrema hac ratione flexa vtrinque ad, plus, minus, digitum. Applicetur elater recuruatus et ſemicircularis β, qualem in figura β delineatum dedi. Conficiuntur elateres hi optime ex elatere chalybeo in horologiis minoribus vſitato, qui aequalis craſſitiei efformatus inuenitur, id quod maxime neceſſarium. Addatur deinde canaliculus quadratus D, libere ante et retro mobilis, inferius ad *d* auricula transuerſim poſita praeditus, et tandem praeponatur cochlea femina E, qua adducta cedit elater, auricula ad axin ſcapi promouetur, et brachium abbreuiatur ; reducta prolongatur brachium, quia elater canalem D cum auricula ſua C repellit atque protrudit.

10. Omnes vero hae partes applicandae cum iis, quae alteri brachio conueniunt, ſeorſim et aequilibrentur, et eandem recipiant extenſionem atque figuram.

11. Vt vero auriculae vtriusque interior acies cum acie axiculi iugi inferiore lineam fere rectam faciat, id, me etiam non monente, bene obſeruandum, et obtinetur per incuruaturam extremorum ſcapi antea explicatam, et per lineam Iconismi GFH delineatam. Neceſſarium hoc requiſitum recte notauit Leupoldus in Thea-

Theatro Machinarum Statico. Part. I. p. 72. Quandoquidem, cum de Inſtrumentis Meteorognoſiae ſcriberem, atque hanc Methodum exponerem, non ſuccurrit haec meditatio, quam deinde in conficienda tali bilance facile animaduertebam, et Machinam iuxta modum hic datum perficiebam; id quod hic loci indicandum duxi.

12. Alter modus ſeu inuentio in eo conſiſtit, vt quatuor vel quinque helices cochleae incidantur vtrique extremitati ſcapi, lineam rectam tenentis, et in extremitatibus non flexi vt antecedens, fiantque binae cochleae femineae *y* extremitatibus ſcapi applicandae. Cochlearum harum feminearum externa figura torno elaboretur, eisque incidatur in extremo cuiusuis externo crena ſeu cauitas annularis, recipiendo annulo chalybeo; ampliori foramine et intus acie praedito apta, vt in crena haerere annuli latioris acies, cique filamenta lancium annecti poſſint. Extremum cochleae femineae deſinat in formam roſae, ſeu rotulae, vt digitis apprehendi et circumduci queat, caeterum Elateres ſemicirculares β addantur, vt in prioribus indicatum.

13. Priusquam vero cochleae illae femineae et elateres adduntur, iugi brachia, quantum fieri poteſt, ad eandem longitudinem efformentur, et aequilibrentur exacte; deinde reliqua applicentur, et iterum aequilibrium ipſis ope cochleae concilietur; tandem lances eiusdem exactiſſime ponderis apponantur, et obſeruetur, vtrum aequilibrium ſit conſeruatura bilanx, ſaepius lancibus commutatis.

14. Per haec itaque duo inuenta brachium bilancis alter-

alterutrum et elongari et abbreuiari poteſt, donec iuſta aequalitas longitudinis intra axiculum iugi et punctum ſuspenſionis lancium obtinetur.

Reg. II. *Lingula, ſeu examen ſit ad ſcapum perpendiculare, et in medio eius erectum*

Reg. III. *Lingula, quo leuior, eo aptior praeponderiusculis indicandis.*

Reg. IV. *Latior aliquantulum et macilentior lingula praeſtat rotundae, quia non tam facile vitiatur.*

Reg. V. *Quilibet ſcapus in medio inferius ſub lingula habeat praeponduſculum lingulam, a pondere lanci iniecto inclinatam erigens.*

15. Maximi momenti eſt haec obſeruatio in bilancibus accuratioribus, inprimis in trutina docimaſtica, id quod bene expreſſit Leupoldus in Theatr. Mach. Aut enim (α) axiculus F iugi altius ſit poſitus, vt tota trabs longe infra lineam appenſionis lancium GH dependeat, et grauitate ſua lingulam inclinatam erigat, quod tamen pigram facit bilancem; aut (β) iugum inferius habeat contrapondium L, quod hoc officio fungatur.

16. Sed caute eius grauitas dimetienda. Maior enim huius contrapondii magnitudo bilanci facile quidem aequilibrium demto onere reſtituit, ſed difficilem inclinationem examini permittit. Onuſculum enim lanci impoſitum hoc maius contrapondium remouere nequit, hinc ſitum non mutat bilanx, et lingula differentiam minime indicat, maxime ſi contrapondium hoc longius dependeat. Contrapondium vero minus a minori quidem onere

nere lanci alterutri iniecto dimouetur e ſitu ſuo perpendiculari, ſed quia illud impar grauitati lingulae, erigere hanc nequit.

17. Neceſſe itaque eſt, vt contrapondium hoc aliquantulum praeponderet lingulae, et curta ſit eius magnitudo perpendicularis, quae aeſtimanda et menſuranda ab acie inferiore axiculi iugi deorſum: quo enim longior illa dependet, eo difficilius mouetur.

18. Nam conſiderandum eſt vtrumque brachium bilancis, intuitu huius contrapondii longitudinis tamquam vectis recuruatus, cuius brachium minus dat contrapondii longitudo *a*, maius, brachium alterutrum iugi *b*; vis agens eſt onuſculum lanci impoſitum; onus mouendum; ipſa et grauitas et longitudo contrapondii *a*. Quo breuior illa *a*, eo ſaepius in longiori brachio *b* continetur; quo maior *a*, eo potentius reſiſtit virtuti impellenti, cuius niſus in maius contrapondium inanis eſt, quia imbecillior, quam vt illud a ſitu perpendiculari remoueat atque lingulam inclinet. E. g. Conſideretur iconiſmus α huius §. ibi contrapondii longitudo eſt *a*, quae duodecies continetur in brachio *b*, ergo onuſculum aliquod brachio *b* additum duodecies maiorem vim exſerere poteſt in contrapondium ope brachii *b*, quam onuſculum nudum absque brachio *b*. Iconismus β dat brachium minus *a* ſexies in maiori brachio contentum, ergo vis *b* figurae β, dimidium tantum valet in *a*, in reſpectu ad figuram α Hinc dupla hic onuſculi grauitas requiritur ad mouendam lingulam et remouendum contrapondium, id quod in α ſimplex tantum efficit.

19. Vt itaque proportio contrapondii ad lingulam exacte haberi, et curta longitudo brachii minoris eſſe poſſit, ſequentem excogitaui methodum : In ſcapi medio ſit contrapondium admodum curtum *a*, ex cuius extremo dependeat contrapondium lingulae adhuc aliud *k*, rotundum ſeu cylindriforme ad dextram et ſiniſtram facile et libere mobile ope articuli, clauulo quadrangulari inſtructum, cuius infima acies in crenula foraminis ſpatioſi et rotundi haereat, in cylindro vero fixus ſit clauulus, quod quidem contrapondium propter ſuam leuitatem lingulam *l* inclinatam erigere non valeat, inciſa tamen illi ſit cochlea mas, cui applicetur cochlea foemina *m*; formae orbicularis, tantae grauitatis, quanta erectioni lingulae ſufficiens iudicatur. Haec tam diu grauitate ſuperflua priuetur, donec lingula et a leuiſſimo pondiuſculo lanci impoſito differentiam indicet, et tamen demto pondiuſculo lingulam iterum erigat.

20. Dico itaque hoc modo facile remoueri contrapondium, linguam inclinari, et onuſculi grauitatem praeponderare poſſe, quia breue brachium *a* vigeſies continetur in brachio *b* alterutro ſcapi, et cum eo conſtituit vectem recuruatum, cuius hypomochlium eſt axiculus, vis mouens eſt aggrauatio lancis, onus mouendum contrapondium *k* lingulae, et quia hoc onus tantum ad latus eſt mouendum, facilius hoc fieri poteſt, quam ſi ſitus eius perpendicularis in ſitum obliquum eſſet conuertendus, cui impar eſſe vel minimum onuſculum facile percipitur.

Reg.

Reg. VI. *Axiculi inferior acies* F, *pauculum ſupra lineam* GH, *per puncta ſuſpenſionis lancium ductam ſit poſita.*

21. Satis neceſſarium hoc requiſitum ab aliis iam demonſtratum, probe obſeruandum. *α* Altius enim poſitus axiculus iugi, pigritiem inducit bilanci. *β* in ipſa ſuſpenſionis lancium linea ſitus bilancem dat admodum celerem, et nunquam fere ad quietem redeuntem; *γ* infra lineam hanc collocatus bilancem plane perdit, vt ea nunquam horizontaliter ſtare poſſit, ſed demiſſo alterutro brachio oblique dependeat.

Reg. VII. *Non admodum longe dependeat iugum ab axe, alias pigram et ſegnioris motus habebis bilancem.*

22. Egregie quidem nutat atque oſcillat diutius antequam ad quietem redit illud iugum quod axiculum altius ſupra ſcapum habet poſitum, ſi lances nondum ſint appoſitae, ignariſque bilancem promittit celerem atque iuſtam. Sed ſpe fruſtrantur, qui hanc in mobilitate talis ſcapi ponunt fiduciam. Appenſis enim lancibus pigram atque inertem experiuntur bilancem. Quo altius enim axiculus ſupra ſcapum eſt poſitus, eo tardior deprehenditur bilanx, quam vt a minori pondere lingula poſſit moueri. Contrapondio quidem lingulae non opus habet talis bilanx, quandoquidem dependens trabs vices contrapondii gerit, ſed eo ipſo difficilius mouetur illa ab onere impoſito, cuius ratio Mathematicis clarius patet quam vt prolixa indigeat explicatione. Fiat itaque hoc modo.

23. Ducatur linea quae aciem ſuperiorem clauiculorum appenſioni lancium dicatorum, et aciem inferiorem axiculi iugi fere tangat. Latitudini igitur iugi ſub linea dicta in extremitatibus inſerantur clauiculi ad lances appendendas, ita vt eorum acies ſuperior hanc lineam fere tangat. Deinde diiudicetur et rite ordinetur quantitas contrapondii lingulae, tunc trabs recte erit diſpoſita, e. g. bilanx Tab. II. §. 23. delineata difficulter mouetur, ſi lancibus et pondere aliquo oneratur quanquam lancibus nondum appenſis celerrimam edat vibrationem.

Reg. VIII. *Acies axiculi cis et vltra ſcapum in linea recta ſit poſita, alias pigram facit bilancem. Prodeat quoque ad angulos rectos ex ſcapo in vtroque latere ne ad aginam allidat lingula, maxime ſi agina ſit latior.*

24. Prius hoc obtinetur, ſi loco axiculi *a* in medio latioris et in extremis prominentibus vtrisque acie praediti, ſubſtituatur axiculus figuram parallelepipedi *b* habens. Ille ita per trabem traiiciendus, vt vna acies deorſum altera ſurſum ſpectet, reliquis duabus ad dextram et ſiniſtram reſpicientibus. Poſterius, vt ſcil. axiculus ex ſcapo ad angulos rectos vtrinque procedat, circino explorandum, nempe ex ore foraminis, per quod traiiciendus axiculus ad diſtantiam arbitrariam ſignentur puncta duo in linea recta vtrinque, deinde traiiciatur axiculus et ex punctis his indagetur diſtantia aciei cuſpidis, haec ſi ac-

aequaliter diſtabit, indicio erit, axiculum ad angulos rectos eſſe poſitum.

Reg. IX. *Axiculi extrema ſint cuſpidata, ita tamen, vt cuſpis ex inferiori acie prodeat, et cum ea in linea recta ſtet, ſurſum vero in decliue abeat.*

25. Frictio illa, quae accidere ſolet α, quando trabs non in medio aginae haeret, vnde ad aginam allidit α, valde detrimentoſa exiſtit. Corrigitur illa β, ſi extrema axiculi vtrinque ad lamellas quaſdam *bb* aginae ab extra apponendas impingunt, et quidem in puncto tantum, vt hoc fiat, conducit, ideoque axiculi extremitates ſunt cuſpidandae, quia itaque cuſpis in acie eſt, quae centrum axis ſcapi in vibratione repraeſentat, ideoque nulla fere frictio vel tantum inſenſibilis contingit.

Reg. X. *Agina perpendiculariter dependeat, ita, vt, ſi in ſuperiori nodulo, quem Margaritam vocant, vel potius ante illum, filum cum ponduſculo ſuſpendatur, illud foramen, in quo axiculus mouetur, accurate biſidat.*

26. Obſeruatio haec admodum neceſſaria eſt, ſed difficillime et non ſine magna attentione obtinetur intentio. Si enim in alterutro latere aginae plus grauitatis eſt, decedit agina a ſitu perpendiculari, et lingula ad alterutrum latus margaritae, ſeu noduli ſuperioris declinat. Imo tota forma aginarum vulgarium hoc vitii habet, vt vacillet, et ſitum ſibi mutuo oppoſitorum foraminum axiculo deſtinatorum vitiet.

Tab.III. 27. Huic etiam malo duplici remedium accommodaui, et aginam a vulgari forma plane alienam adhibui, quam nunc deſcribam: *α, β, γ.*

Ex lamina vnica latiore A aginam confeci, lamina ſuperius et inferius *a* et *b* recuruata: ita, vt antica pars aperta remaneret, et lingula nuda γο. crure aginae nullo tecta, conſpectui ſe ſiſteret. In laminae huius latioris inferiore parte, longum et latum foramen *cc* incidi, ita vt illud quadret ad recuruatum et ſurſum inflexum inferius extremum. Illud foramen inferius vbi deſinit, et pars aginae ima ſurſum flexa, recipiunt, tanquam fulcra duo, axiculum ſcapi, vt in illis haerere et iugum librare ſe poſſit. In recuruato illo aginae extremo incidatur ſemicircellus *d*, piſi magnitudine, e regione foraminis longioris *c* laminae oppoſitae, et in eius medio fiat rimula tenuiſſima, in qua quieſcere poſſit axiculus, id quod in longiori foramine ex oppoſito ſito etiam fiat, ita, vt crenae hae duae ſibi opponantur mutuo, aptaeque ſint excipiendo axiculo ſcapi, immiſſaque deorſum trabe in aginam, axiculus haereat in duabus iſtis crenulis. In ſuperiori aginae ſpatio inter latum eius dorſum et extremum incuruatum exiſtente, aptetur lamella, et in illa rimula tenuis, duarum circiter linearum longa incidatur, vt per illam lux conſpici, ad inſtar lineae lucidae perperpendicularis poſſit. Ex ea iudicatur lingulae perpendicularis, ſitus, ſi ſcil. medium aginae occupat, cum rima iſta lucida lineam rectam conſtituit, et nec ad dextram, neque ad ſiniſtram deflectit. Lamella iſta per cochleam perpetuam gg transuerſim poſitam mobilis ſit, vt

vt in vtrumque latus promoueri, et ſi rectum ſitum, medium ſcil. in agina adquiſiuerit, immobilis manere posſit. Prodeat illa lamella rima inſtructa *f* ſupra aginam eamque cum articulo mobili *x* excedat *b* et ſuſpendatur ex vno quadrangulari *k* in alia lamina firmiore *l*, ita firmato, vt durius, ſed tamen in gyrum moueri atque circumduci poſſit, id quod obtineri poteſt, ſi in tergo laminae firmioris *l* ope cochleae *m* bene adducatur, vt duriorem circumgyrationem nanciſcatur. Ope huius vnci circa ſuam axin mobilis, agina et ad dextram et ad ſiniſtram agi, et ita perpendicularis ſitus rimulae ad ſitum axiculi ſcapi obtineri poteſt. Cognoſcitur vero aginae perpendicularis ſitus, et recte poſitam eſſe lamellam, quae rimam inciſam habet, ſi ex acicula aliqua *n*, ante rimulam *f* in incuruato extremo aginae ſuperiore *a* firmata, demittatur filum *p* perpendiculare, crenam aginae *d*, axiculum recipientem, et rimulam lamellae ſuperioris *f* qui in arcu aliquo magnitudinem aginae ſitus mutati notet. Tandem ad inferiorem aginae partem anterioremtegens et occultans. Addatur ad vncum *k* indiculus *q*, et poſteriorem lamellulae duae *s*, *t* ordinentur (v. Tab. II, β it. Tab. I §. 23. β) ope aliquot exiguarum cochlearum, vt ad illas allidant axiculi cuſpides, et ſcapus in medio cauitatis aginae permaneat. Fundus aginae *u* in medio pateat, vt per foramen patens contrapondium lingulae *γz* transmitti, libereque moueri queat. Ex hac ſtructura agina nouam formam adquiſiuit, qua mediante et ſcapus ſine frictione maiori facile moueri, alliſio ad aginam inhiberi, margarita, vel eius loco rima ſuperioris lamellae *f* ad crenam

d, axi-

d, axiculum excipientem perpendiculariter agi, totaque bilanx in ſitum accurariſſimum poni poteſt.

Vitium vero illud leuioribus ſcapis et aginis docimaſticarum bilancium frequens, quod ſcil. axiculus non ſemper ad punctum imum et perpendiculare foraminum rotundorum aginae deſcendit, ſed ad alterutrum latus perſiſtit, vnde lingulae deuiatio accidit, penitus tollitur, alio modo vix corrigibile. Hac enim in agina axiculus ſemper in crenula ſua haeret atque permanet, etiamſi leuior ſit trabs, perpendicularem alias deſcenſum ad imum foraminum aginae propter leuitatem nonnunquam eludens.

28. Denique ad recte inſtruendam bilancem hoc modo agatur:

1. Dependeat filum *p* cum ponduſculo ex acicula *n* ſuper rimam ſuperioris lamellulae in medio aginae conſtitutam. Quod ſi filum tegit hanc rimam, et conſpectum lucis inhibet, inferne vero crenam axiculo dicatam etiam occultat, bene ſita eſt agina, et correctione non indiget. Sin minus, circumducatur aliquantulum uneus ſuperior quadrangularis *k*, eousque, donec ad datam normam dependeat filum *p*.

2. Imponatur trabs cum contrapondio lingulae in aginam absque cochleis foemineis et elateribus extremis ſcapi dicatis, et fiat, vt lingula in linea recta cum rima ſuperiori lucida *f* conueniat, id quod obtinebitur demendo aliquid lima de brachio praeponderante.

3. Conuertatur iugum ita, vt ſiniſtrum quod fuit brachium, fiat dextrum et obſeruetur, vtrum rima lucida

et

et lingula adhuc rectam teneant lineam. Item ne lingula allidat, ad latam aginae lamellam, ſeu dorſum aginae.

4. Eximatur iterum iugum, et applicatis extremitatibus, cochleis foemineis et elateribus, exploretur circino, vtrum crenae excipiendis annulis filamentorum lancium deſtinatae in aequali diſtantia ab acie axiculi ſcapi diſtent, et accommodentur poſtulato. Hoc modo parata trabs aginae immittatur, et obſeruetur, vtrum adhuc lingula cum rima transparente *f* conueniat. Si illa deuiat, abradatur aliquid de elatere praeponderantis brachii, eousque, donec aequilibrium erit conciliatum.

5. Tandem appendantur lances aequalis plane ponderis, et ſi alterutra praeponderaret, ope cochlearum (§. 12.) extremitatum, pauculum id, quod reſtat, corrigatur.

6. Commutentur lances, et ſi omnia recte fuerint obſeruata, differentia nulla dabitur; ſin minus, quaeratur vitium, et corrigatur ad datas obſeruationes antecedentes.

Dico, hac ratione bilancem bene inſtructam prodituram, et palam fieri vitia, in antecedentibus notata et bilancibus plerumque adhaerentia eſſe correcta.

Cap. II.

Noua bilanx absque lingula admodum celer atque accurata.

Tab. IV. 1. Quandoquidem obſeruaueram, quod lingula eiusque contrapondium multum impediat bilances, quo minus leuiſſimum onuſculum indicent, eiusque grauitatem prodant, de alia bilancis forma ſolicitus fui, et meditationes meae ſequentem optimae ſpei foetum, vt mihi videtur, conceperunt, ipſa deinde praxi obſtetricante Mechanica, in lucem editum, exſpectationique omnino reſpondentem. vid. Tab. IV.

2. Fiat ſcapus ſeu iugum AA, chalybeum, ſed lingula deſtitutum, inferius latus *aa* lineam rectam referat, reliqua vero latera in medio ſcapi *b* turgeſcant, et ad triplam partem craſſitiei ſcapi in latum et altum exſurgant, craſſioresque ibi relinquantur.

3. Medio in latere inferiore excauetur ſcapus ad *c*, et ſemicirculare ei incidatur foramen inferne apertum. Huic foramini *c* in ſuperiori medio incidatur crena transuerſa, vix oculis conſpicienda, ſed tamen, ſi cultelli aciei imponatur iugum, vt ſenſibiliter in ea haereat. Sit illa crena exacte elaborata, lima ſubtili, angulum in acie 90° habente, leuiter inciſa, et tali etiam chalybe politorio optime laeuigata. Crenula haec punctum erit ſuſpenſionis, grauitatis, et quietis, quod in aliis bilancibus axiculus ſuppeditat.

4. Ex

4. Ex hac crenula *c* vtrique brachio concilietur exacte aequalis longitudo. Incidantur extremitatibus cochleae mares *d*, et aptentur cochleae foeminae γ, quales etiam §. 12. Cap. praec. Tab. I. ſub litera γ delineauimus, vna cum elateribus β et annulis latis *x*. In quauis extremitate ſcapi prodeat lata lamellula *f*, ſed non craſſa. Demitur ſcil. ad duas vel tres lineas digiti cochleae pars craſſitiei ſuperior et inferior, relicta in medio latitudine extremitatis, ita vt lamellula iſta *f*, in eius cuſpide ad 3. vel 4. lineas promineat, et ſcapus bilancis erit paratus.

5. Deinde fiat lineale orichalceum BBB, in extremitatibus ad digitum dimidium incuruetur *gg* ad angulos rectos ita, vt in antica parte duae pinnulae *gg* prodeant, cum lineali angulum rectum conſtituentes.

6. Cuiuis harum pinnularum adaptetur ab extra, cochlea perpetua *h* in ſuis ſuſtentaculis *mn* mobilis, in ſitu perpendiculari, quo mediante lamellula quaedam *p*, 1 lineam craſſa, et 3 lata ſurſum atque deorſum agi poſſit. Excedat lamella in longitudine pinnulas, et prodeat *k* ante eas verſus centrum linealis. Rimula etiam admodum anguſta *q* prominentiis iſtis incidatur, ita, vt lineale cum iſtis rimulis lineam rectam et parallelam faciat. In linealis latitudine, poſt illas rimulas e regione fiat foramen *r* amplum 3 vel 4 linearum in diametro, luci admittendae dicatum, ita, vt per rimulam linea *q* lucida tranſpareat.

7. Lineale in medio *l* ex vtroque latere craſſius reddatur, adfirmatis duobus fruſtulis orichalceis, *ss*, et per ea perfringatur foramen *t* tres lineas longum et

 duas

duas latum , inferne duos angulos rectos habens, ſuperne ſemicirculare. In medio ſemicirculari incidatur leuiſſima crenula , quae aciei cultelli impoſita in ea haereat, ex qua deinde lineale ſuſpendi atque librari poteſt.

8. Dependeat etiam ex medio linealis lamina W ſat grauis, vices perpendiculi gerens, quod lineale e crenula *t* ſuſpenſum ad ſitum horizontalem ſemper dirigat, atque in eo conſeruet. In perpendiculari iſta lamina W dimidium digitum infra foramen *t* ſuſpenſionis fiat, foraminulum *u*, ex quo dependeat filum cum pondusculo *y*. Et ſic lineale hoc etiam erit confectum.

9. Iam de ſuſtentaculo vtriusque et ſcapi A, et linealis B perpendiculo praediti ſolliciti ſimus. Fiat lamella 5 circiter digitos longa C,dimidium lata, et ſeſquilineam craſſa.In ſuperiore extremo pertundatur foramen *x*, ex quo ſuſpendi lamina poteſt, Vnum digitum et ſemiſſem infra hoc foramen *x* prodeat cultellus *z* aciem ſurſum vertens. Huic aciei imponendum primo lineale B, deinde iugum bilancis A.

10. Quandoquidem vero onerato hoc modo cultello *z*, lamina C, ex ſitu perpendiculari recedit, et efficit, vt etiam cultellus ſitum nanciſcatur decliuem, ideo in infima parte laminae e tergo prodeat cochlea mas *e*, duos digitos longa, cui applicetur rota O grauior,cochlea foeminea in medio inciſa. Reducta ad extremum cochleae hac rota , contrapondii vices recipit, laminam C ad ſitum perpendicularem adigens , et cultello *z* horizontalem reſtituens; adducta , nimiam laminae propenſionem retrahens.

11. Con-

11. Conſtructionem quod attinet atque iuſtificationem bilancis, haec ſequentem in modum inſtituatur.

1. Suſpenſo lineali B ſuper cultellum *z* ſuſtentaculi C exploretur ope fili perpendicularis *y* infra crenam ſuſpenſionis *t* linealis B aptati, vtrum lineale, vel rimae *q* in pinnulis *gg* verſatiles rectam teneant lineam horizontalem; ſi non, ea inducenda ope cochleae perpetuae *h*, cuilibet pinnulae *g* applicatae.

2. Imponatur cultello *z* etiam ſcapus A, absque elateribus et cochleis, et aequilibretur, donec lamellae extremitatum ſcapi *f* cum rimulis lucidis *q* lamellarum verſatilium in recta ſtent linea horizontali, et conuerſo ſcapo, vt brachium dextrum fiat ſiniſtrum, idem contingat.

3. Scapo hoc modo praeparato apponantur cochleae foeminae γ, absque elateribus, et ex crena ſuſpenſionis *t* ope circini concilietur aequidiſtantia crenulis δ cochlearum foeminearum γ ſuſpenſioni lancium dicatarum.

4. Suſpendatur iterum ſcapus A et aequilibretur; demendo de ſuperflua grauitate cochleae foeminae praeponderantis.

5. Addantur elateres β, et ſi aequilibrium ab iis fuerit vitiatum, tantum lima ab elateribus dematur, quantum opus fuerit ad aequilibrium ſcapo reſtituendum.

6. Tandem addantur lances exacte aequiponderantes.

7. Quod vero in aliis bilancibus lingulae officium eſt, id praeſtabit in hac lamellula *f* alterutra in extremi-

tatibus ſcapi prominens. Si itaque per rimulam *q* laminae verſatilis *p* linea lucida conſpicitur, iudicetur, vtrum lamellula alterutra *f* cum ea rectam conſtituat lineam, quodſi contingit, onus omnino cum pondere concordat, ſin minus, differentia inter vtrumque manifeſtatur, adiectis ponderibus determinanda. Quod vero celeritate eximia haec bilanx gaudeat, et minimum onusculum prodat, hoc ex eo eſt, quod onuſculo nullum linguae contrapondium obſtat, et praepondium eius impedit. Caeterum regulae ad bilances in praecedentibus datae, non ſunt negligendae, in quantum applicari hic poſſunt: e. gr. Vt punctum ſuſpenſionis lancium pauxillum infra aciem cultelli adornetur, qui hic vices axis ſcapi gerit, et quae ſunt huius generis alia.

12. Praerogatiuam et vſum quod concernit huius bilancis, ille in re Metallurgica maximi eſt momenti, praecipue in probatione☉, vbi minima corpuſcula, et fere atomi ſub cenſuram atque examen trahuntur.

13. In ponderibus probatoriis, maxime ad Denarium probatorium conficiendum apprime officio ſuo ſatisfacit, adeo, vt, cum vulgarium bilancium probatoriarum celeritas vix vulgaris pondo particulam elementarem ſc. $\frac{1}{131072}$ indicet, haec bilanx omnino $\frac{1}{4194304}$ particulam vnius Pondo oculis ſiſtat, et $\frac{1}{32768}$ partem vnius Drachmae trahat.

14. In experimentis Phyſicis accuratiorem indagationem poſtulantibus, vt et aliis inſenſibilibus grauitatibus corporum naturalium expiſcandis egregie conducit. Et quae ſunt reliqua.

15. De

15. De hac bilance vereor, vt quis artificum inueniatur, qui iuſtificare eam poſſit, quandoquidem ſtructura facilis eſt, iuſtificationem vero mille difficultatibus implicatam et tantum non impoſſibilem inueni, re ipſa tamen a me praeſtitam et Societati noſtrae inclutae in concione demonſtratam dedi.

Exactisſima manuductio ad iuſtificationem huius bilancis conſequendam.

1. Quandoquidem haec bilanx facilioris quidem elaborationis eſt quam aliae docimaſticae, iuſtificatio tamen propter ſummam accurationem atque celeritatem, minimum etiam praepondium indicantem, admodum difficilis, imo, regularum artis ignaro, plane impoſſibilis erit, hinc modum laborioſum quidem ſed certum atque ſincerum docebo, quo neglecto nulla alia dabitur via ex his tricis ſeſe explicandi et iuſtificationem bilancis obtinendi:

1. Scapus A absque cochleis et elateribus extremorum aequilibretur exacte: Id vt fieri poſſit, quandoquidem lingula deſtituitur ſcapus, hoc modo agatur.

2. Suſpendatur lineale B ex laminae C cultello *z* vt perpendiculum linealis *w* reſpondeat perpendiculo ipſi addito *y* et filum hoc cum linea illius perpendiculari concordet, id quod obtinetur grauitatem praeponderantis brachii linealis B minuendo, et tunc recte ſe habebit ſitus linealis horizontalis.

3. Addatur ſcapus A et ante lineale eidem cultello *z*

lo *z* imponatur, absque cochleis γ et elateribus β, et obſeruetur quantum illius lamellula *f* a linea lucida *q* ſiniſtrae auriculae diſtet.

4. Linea illa lucida *q* ope cochleae *h* lamellam *p* et rimulam *q* dirigentis, adducatur ad lamellulam *f* ex brachiis ſcapi prodeuntem, et cum ea faciat rectam lineam.

5. Conuertatur ſcapus et obſeruetur quantum ſcapi lamella altera *f* diſtet a rimula *q* auriculae lucida.

6. Dematur a praeponderantis brachii ſcapi A grauitate, vt lamella *f* dimidiam partem propius accedat ad lineam lucidam *q*.

7. Linea lucida *q* alteram dimidiam partem acceſſionis abſoluat, et ad lamellam *f* promoueatur, adducendo et reducendo cochleam eius perpetuam *h*.

8. Conuertatur ſcapus et videatur vtrum concordet eadem linea lucida *q* cum lamellula *f* alterius brachii, ſi non, corrigatur vitium ex ante dictorum monitis.

9. Tandem omnia ita diſponantur, vt lamellae *ff* vtraeque cum vtrisque lineis lucidis *qq* accurate conueniant et conuerſo etiam ſcapo idem ſemper eueniat, et quando omnia recte ſe habebunt, ſcapi correctio et aequilibratio erit abſoluta, lineaeque lucidae horizontaliter erunt poſitae.

10. Cochleae iam foemineae absque elateribus apponantur ad ſcapum, et ex centro grauitatis ſcapi ſeu crenula ſuſpenſionis *t* ope circini menſuretur ſitus ſeu diſtantia crenarum cochleis foemineis *ii* inciſarum vt ambae

ambae *ii* eandem nanciſcantur diſtantiam ab iſta crena *t* ſcapi.

11. Suſpendatur ſcapus A et de praeponderantis brachii cochlea ſoeminea γ in extremo tantum abradatur quantum ad aequilibrium brachiis reſtituendum ſufficit, conuerſo ſaepius ſcapo.

12, Addantur ad cochleas ſoemineas elateres β et reconciliata crenis *ii* aequidiſtantia a crena media *t*, ſuſpendatur iterum ſcapus et redigatur ad aequilibrium, grauitatem elateris (non cochleae ſoeminae) brachii praeponderantis minuendo, et conuerſio ſcapi non negligatur.

13. Appendantur lances diligentiſſime ad eandem grauitatem redactae et obſeruetur vtrum aequilibrium ſeruet bilanx; ſi ab eo deflectit dematur aliquid de praeponderantis brachii cochlea ſoeminea (non de elatere) donec aequilibrium fere,ſed non totum, fuerit inductum, et denuo remoueantur lances, et ſcapus absque lancibus reducatur iterum ad aequilibrium imminuendo grauitatem elateris (non cochleae) praeponderantis brachii.

14. Suſpendantur iterum lances et agatur ad praeſcriptum §. 13. Cap. praecedent. idque quod in §§. 11. 12. 13. dictum repetatur ſaepius, donec bilanx prodeat omnibus modis abſoluta et correcta.

15. Tandem examen rigoroſum ſubeat bilanx. Oneretur vtraque lanx tanto pondere quanto ſcapus ſufficit ferre e. g. cuiuis imponatur vna vncia, et aequilibrentur ambae exactiſſime, deinde commutentur lances,quod ſi aequilibrium iis manet, recte ſe habet bilanx, ſin minus,

quaeratar error iuxta praecedentium §§. monita et corrigatur donec deſideriis erit ſatisfactum.

2. NB. Obſeruatio lamellularum *f* et linearum lucidarum *q* ita inſtituatur: Bilanx ad feneſtram conclauis locetur, vt per foramen *r* et rimulam *q* lux transpareat. Deinde oculus obſeruatoris ita ſituetur, vt lineae lucidae *qq* in medio foraminis *r* conſpiciantur et neque altiores neque demiſſiores appareant ſed diametrum horizontalem referant foraminis rotundi *r* ad hoc ſi attenditur, tunc ſemper ex eodem puncto viſionis obſeruationes rite et aequaliter erunt adornatae.

Methodus lances ad aequale pondus redigendi.

3. Cum vero vulgaris trutina ſeu docimaſtica minimum illud praepondium alterutrius lancis non prodat, in hac ipſa vero bilance ſumma aequalitas lancium requiratur tali modo agendum vt lances eandem recipiant grauitatem.

1. Quando ſcapus, cochleis foemineis *ii* et elateribus ſuis inſtructus, aequilibratus eſt, et, conuerſus saepius, cum rimula lucida ad ſiniſtrum latus ſemper concordat ſicuti §. 1. momento 12. traditum tandem appendantur lances cum ſuis filamentis et annulis latis.

2. Notetur in auriculae *g* margine prominente altitudo lamellae ſcapi *f*.

3. Deinde commutentur lances vt dextra fiat ſiniſtra

niſtra et lamellae *f* altitudo iterum ſignetur in margine prioris auriculae *g*.

4. Diſtantia duorum iſtorum ſignorum dimidietur et ſigno notetur.

5. De lance praeponderante et infra hoc ſignum deſcendente tantum abradatur lima, vt tandem cum ſigno praedicto conueniat lamella *f*.

6. Commutentur iterum lances, et ſi lamella *f* ad datum ſignum repetit ſuam ſtationem, res erit peracta, et lances habebis exactiſſime aequiponderantes.

7. Tandem agatur ad praeſcripta monitorum §. 1. membri 13. ſſ.

Cap. III.

De bilance cum centro ſeu axiculo ſcapi mobili.

1. Quandoquidem vero in accurata bilancium conſtructione operationem fere impoſſibilem reddunt, planeque defatigant artificem tria haec neceſſaria requiſita (1) inueſtigatio centri bilancis ſcapi ad aequalem brachiis longitudinem dandam. (2) Inductio aequalis grauitatis brachiorum, quae modo ordinario peragitur lima, aliquid vel a dextro vel ſiniſtro brachio demendo; cum leuiori nihil addi poteſt. (3) Conciliatio concordiae, inter aequalitatem et longitudinis brachiorum et grauitatis quia inquiſitionem in aequalem longitudinem et grauitatem ſimul, opus longe difficillimum inueni. Elongato enim breuiori brachio, alterius grauitas vitiatur; corre-

cta grauitate, elongatio iterum eſt caſtiganda, donec proportio inter vtriusque correctionem obtinetur, quae ſi non caſu tandem inuenitur, exercitatiſſimum etiam mechanicum proſternit atque a labore vlterius proſequendo deterret, quia trabem ſaepius limatam graciliorem, et oneri ferendo imparem vtplurimum reddit, ideoque plane inutilem atque deperditum.

2. Anniſus itaque ſum vtrisque prioribus deſideratis ſubuenire, vt tertium eo facilius obtineri poſſit, et deperditio totius operis praecaueatur. Id ſequenti inuentione feliciter conſecutus ſum, et feliciſſime expediui, ita vt haec et trutinis ſeu docimaſticis ſubtilioribus, et bilancibus maioribus, ponderationi centenarii et vltra dicatis, ſiue illa lingula inſtructae, ſiue absque lingula adornatae fuerint, applicari posſit, et ſic accurationem bilancium ad ſummum fere perfectionis faſtigium adductam arbitror. Inuentionem indicabo:

Tab. V. et VI. 3. Fiat ſcapus A pedem longus cuius extremis cochleae mares *bb* inciſae ſint, ad longitudinem fere digiti. Creſcaut eius brachia pedetentim centrum verſus, vsque dum tantum incrementi acquiſiuerint, vt ſpiſſiores cochleae mares *aa* vtrique brachio prope centrum ſcapi, incidi poſſint, ad longitudinem dimidii digiti, vt hoc modo earum foeminae *ee* ſine impedimento et libere admittantur ab illius maribus *bb* tenuioribus. Medium *d* ſcapi fiat quadrangulare, latitudine craſſitiem dorſi ſuperans, longitudo fere ſemidigitalis ſit. In maioribus bilancibus omnia adornentur ad proportionem.

4. Fiat ephippium D dorſo ſcapi proportionale cuius

cuius latera plana anterius *a* et poſterius *b* formam habeant in fig. D. expreſſam. Inferior pars laterum in extremitatibus duabus cochleis *cc* transuerſis connectantur, cochleae autem cylindrulis cauis *yy*, et mobilibus intra ephippium induantur, vt in cauo ephippii ſcapus ſuper eos commode porro et retro verſari poſſit. Dependeat vero anterius latus in forma trianguli $\frac{1}{3}$ digiti infra ſcapum deorſum *k*. Per vtrumque latus ephippii fiat foramen *f* in poſteriori latere apertum inferius, in anteriori in angulum perquam acutum deſinens, ſuperna in parte ſit vtrumque ſemicirculare, in quorum apicibus incidatur crenula, hypomochlio dicata, perpendiculariter ſupra angulum inferiorem acutum, ex quo angulo ſuſpendendum erit filum illud orichalceum ponduſculo *g* oneratum, quod ſcapo poſt librationem ſitum horizontalem reſtituit.

5. Ad extrema ſcapi applicentur rotulae cochleis foemineis patulae *zz* ex vna tantum parte, ex altera clauſae, vt extremis ſcapi firmiter applicari poſſint, ex clauſa parte rotularum prodeant lamellae *oo* perpendiculariter poſitae et tenues, horizontalibus crenulis donatae, longae ſint 2. lin. latae 1$\frac{1}{2}$ lin. craſſae $\frac{1}{2}$ lin. Rotulis illis crena circularis torno inciſa ſit ex qua lancium ſunes annulo latiori *xx* annexi dependeaut, eodem modo vt in praecedenti bilancis deſcriptione Cap. II. §. 4. et Cap. I. §. 12. indicatum.

6. Ad reliquam partem cochlearum marium *bb* vtriusque extremitatis ſcapi applicentur binae cochleae foeminae, vna in forma rotulae *y* altera *u* in eadem for-

ma, ita tamen vt duo cornua promineant ex latitudine, ad circumducendam cochleam. Hae cochleae foemineae *yy* et *uu* in longioribus cochleis maribus *bb* cis et vltra gyrari poſſunt ad aequilibrium brachiis inducendum. Duplicatae ſint, vt vna ad alteram durius adducta, vtraeque ſibi firmius incumbant, ne a leui attactu loco depelli poſſint, ſed immotae locum aſſignatum ſeruent.

7. His itaque peractis componatur tota bilanx hunc in modum : Scapus A immittatur in ephippium E. Duae cochleae maiores *cc* cis et vltra ephippium addantur. Deinde vtriusque cruris cochleis maſculis minoribus *bb* applicentur binae matres *yy* et *uu*, quae ſe inuicem tangant. Porro apponantur ad extrema brachiorum cochleae *zz* crena annulari donatae, quibus deinceps imponantur annuli *xx* cum dependentibus lancibus. Tandem ſuſpendenda erit tota bilanx per foramen medium *f* ephippii D.

Tab. VI. 8. Antequam vero ſuſpendatur haec bilanx conficiendum erit lineale BBB cum ſua lamina perpendiculari *w* quemadmodum hoc deſcriptum extat Cap. II. §. 5. ſſ. Non tamen neceſſe eſt, vt hoc lineale in vtrisque extremis eandem habeat formam quam ibi delineauimus ſed brachium ſiniſtrum formam illam habeat neceſſe eſt, dextrum vero deſinat in cochleam craſſiuſculam marem 2. digit. longam *a*, cui adiiciantur binae cochleae foeminae, quarum vna *b* inſtar rotae ſeu orbiculi, altera *d* cum manubriis binis efformata ſit. Hae cochleae ad centrum ſcapi ductae brachium hoc linealis leuius, reductae grauius faciunt.

9. Sus-

9. Suſpendatur hoc lineale ex cultello F tanquam clauo ſuſpenſionis et linealis et bilancis; ita vt perpendiculi *y* filum, lineae per medium laminae deſcendenti reſpondeat, quod cochlearum foeminearum *b* et *d* promotione obtinebitur His recte ſeſe habentibus ſuſpendatur ex eodem cultello F tota bilanx per foraminis medii *f* ephippii D crenulam ſuperiorem cuius inferiori angulo addatur ponduſculum *g* tunc tota machina erit adornata.

10. Iuſtificatio bilancis hoc modo inſtituatur: Redigatur ad aequilibrium ſcapus ; id quod ex crena brachii, crenae linealis BBB in linea recta reſpondente cognoſcitur. Hoc vt eueniat ducatur ephippium ope adiacentium cochlearum *cc* quantum fieri poteſt ad medium ſcapi punctum et cochleae combinatae *yu* brachii praeponderantis vlterius verſus ephippium promoueantur, ſic grauius brachium leuius redditur, et alterum leuius grauitate augetur. Non itaque neceſſe habebis limando grauitatem praeponderantis brachii minuere.

11. Recte conſtituta hoc modo bilance, binis lancibus imponantur binae vnciae accuratiſſime iam aequilibratae, et obſeruetur vtrum bilanx recte adhuc ſe babeat, an vero vnum brachium praeponderet, quod ſi poſterius, indicio eſt, brachia aequalis longitudinis non eſſe, hinc praeponderans brachium abbreuietur promotione ephippii per cochleas appoſitas, et aequalitas grauitatis brachiorum, hac ratione per protruſionem ephippii vitiata corrigatur per cochleas compoſitas *yu.* Idque continuetur tam diu, donec bilanx et cum impoſitis iſtis vnciarum ponderibus, et ſine iſtis, ſitum eun-

dem

dem retineat, crenulaeque extremitatum lineam rectam conſeruent et ſic iuſtificatio bilancis erit perfecta.

12. Haec de bilancibus absque lingula. Si vero bilanx lingula expetatur inſtruenda, firmetur in ephippio lingula exacte ſuper crenula hypomochlio dicata, reliqua omnia fiant vt in antecedenti deſcriptione traditi, modo per ephippium traiiciatur et prodeat axiculus, ille inſtruatur vt Cap. I. §. 21. 23. 24. 25. dictum et tunc ſcapus in ephippio erit mobilis. Trabs vero imponatur in aginam iuxta Cap. I. Reg. X. §. 27. adornatam. Lineali vero BBB cum lamina perpendiculari *w* hic opus non erit. Ad hunc modum maiores etiam bilances adornari poſſunt, ita vt ad praepondium oneris minimum indicandum aptae inueniantur.

Cap. IV.

De bilance docimaſtica ſingulari ponduſcula probatoria mole octies auctiora admittente.

Tab. VI. 1. Animum denique induxi eiusmodi bilancem probatoriam conficere quae ponderibus ordinariis octies maioribus onus octies minus indicare valeat, eum in finem vt pondera probatoria eo exactius in minima diuidi poſſint. *E.* g. Onus drachma graue aequiponderabit ponderi octo drachmarum ſeu vnciae. Si itaque drachma in 100 partes diuidenda, tunc loco drachmae

vncia

vncia in 100 particulas diſpeſcatur quarum quaeuis centeſimae drachmae parti aequiualebit. Non difficilis factu mihi res videbatur quam aggreſſus hunc in modum perfeci.

2. Primo elaboraui lineale BBB cum lamina perpendiculari *w* et perpendiculo ex filo ſuper linea verticali dependente, quale Cap. II. §. 5. et Cap. III. §. 8. deſcriptum.

3. Scapum confeci cuius brachia inaequalis erant longitudinis, ſuperabat enim ſiniſtrum A octies dextrum Z ſcil. ſi ſpatia intra puncta ſuſpenſionis lancium, et hypomochlium ſeu punctum ſuſpenſionis ſcapi conſideres, vlterius vero extendebatur illud brachium Z ad vnum digitum a puncto illo ſuſpenſionis lancis. A ſiniſtro A dependebat lanx ab extremitatis puncto fixo, dextrum vero brachium Z prope hypomochlium bilancis erat quadratum *a* et deſinebat in cochleam marem *r*.

5. Prope hypomochlium affixum erat elaſtrum *s* quod nitebatur in cylindrum *t* in medio foramine quadrangulari praeditum, brachio *z* proportionale, vt cylindrus ibi ſit mobilis. Ad cylindri extremum transverſe traiectus erat axiculus *m* lancis appenſioni dicatus, a cuius prominentibus extremis dependebat longior auricula *p*. cum vnco *h*. Vltimo loco cochlea foeminea *q* et *l* addebatur, qua mediante cylindrus *t* cum axiculo *m* ſuſpenſioni lancium inſeruiente ad crenulam *f* ſeu punctum ſuſpenſionis ſcapi, propius adduci vel remoueri poteſt ad elongationem et abbreuiationem brachii Z.

6. Scapus lingula erat deſtitutus et ſuſpendeba-

tur in crenula *f* ſuper cultello F vt antecedentes bilances. Brachium longius A in vltima extremitate deſinebat in tenuem lamellam *z* crena *o* inciſam, quae etiam ex antecedentibus iam nota ſunt.

7. Tandem ad brachii breuioris *z* auriculam dependentem *p* apponebatur cylindrus cauus X in ſuperiori parte cochlea *b* clauſus cum foramine *k* quod ad ſuſpenſionem cylindri X facit, inferius orificium cylindri erat imperuium, vnco tamen *g* etiam praeditum ad recipiendam lancem cum ſuis funiculis. Haec totius machinae ſtructuram abſoluebant.

8. Iuſtifiationem huius bilancis quod attinet, ea tali modo adornetur: Suſpendatur bilanx ex ſcapi crenula *f*, ſpatium intra punctum ſuſpenſionis lancis et punctum ſuſpenſionis ſcapi *f* brachii maioris A diuidatur in octo partes aequales, et fiat alterum illud ſpatium minoris brachii Z octies minus, ita vt $\frac{1}{8}$ tantum longum ſit. Deinde tantum iniiciatur plumbi diminuti in lancem minoris brachii Z quantum ſufficit ad ſcapum in ſitum horizontalem ducendum, vt crenulae *o* extremi ſcapi et *k* linealis BBB horizontalem lineam conſtituant. Poſtea in lancem minoris brachii Z ponatur 1 uncia ſeu 8 drachmae, et in lancem maioris brachii A 1 drachma, vtrisque ponderibus exacte ad trutinam paratis, et obſeruetur vtrum ſcapus ſeruaturs ſit ſitum priorem ſcil. horizontalem. Si brachium minus Z praeponderabit, eximatur aliquid plumbi ex eius lance, et adducatur cylindrus *t* cum axiculo *m* aliquantulum ad crenulam *f* ope cochleae *q*. Si vero brachium A grauitate praeualeat,

adda-

addatur pauxillum diminuti plumbi ad alteram lancem brachii Z et ſimul cochlea *q* reducatur. Idque tam diu iteretur atque tentando inueſtigetur, donec bilanx et cum ponderibus et absque ponderibus recte ſuo fungatur officio et tunc omne plumbum ex lance eximatur, cylindrus X aperiatur eique iniiciatur, vt qui ad eum finem factus eſt, claudatur iterum, et bilanx deſideratum dabit effectum.

9. Huius bilancis ope pondera probatoria maiora fiunt mole , et tamen ordinariis ponderibus aequipollent, e. g. 1. vncia vicarius eſt 1. drach. 1. loth vices gerit $\frac{1}{2}$ drachmae, et ſic porro, ita vt pondera ſemper octies maiora onere ponderando emergant.

10. Vſum hunc habet bilanx, vt ſi e. g. una drachma in centrum partes diuidenda ſit, ex qua diuiſione exiles valde emergunt partes, tunc loco 1. drachmae diuiditur 1 vncia in 100 partes et $\frac{1}{100}$ vnciae idem praeſtat ac $\frac{1}{100}$ drachmae, niſi quod haec particula vnciae mole octies auctior oculis ſe ſiſtat. Et ſic vtilitatem atque commoditatem praebebit haec bilanx non ſpernendam.

Cap. V.

De fulcimento quodam bilancium probatoriarum commodo.

1. Non poſſum quin artificibus metallurgis commodum fulcimentum proponam cuius ope bilances ad

 quie-

quietem rediguntur, ita vt non opus ſit eas ſusque deque librare, quod vulgo fit, et nunquam ſine vacillatione machinulae peragi poteſt; ſed ſuſtentaculum, ſuper quo quieſcunt lances, deprimitur incommota manente bilance.

2. Aſſeruatorii ſeu ciſtulae bilancis fundus X diuidatur in tres partes aequales lineis duabus *a* et *b* ſecundum longitudinem ductis, quas biſecet transuerſim ducta alia, *c*.

3. Ex puncto interſectionis, quod tergo ciſtulae proximum eſt *d*, parallelepipedium A 1½ dig. Ruten. decimal. latum, ½ dig. craſſum vltra mediam ciſtulae altitudinem normaliter aſſurgat.

4. Vertici parallelepipedi A crena incidatur 1. dig. long. ½ lata *e*, cui immittatur prominentia alius cuiusdam parallelepipedi B priori ſimilis, haec prominentia exacte quadret in prioris crenam, ita vt duo parallelepipeda, ſi ſibi mutuo immiſſa fuerint, vnicum parallelepipedum conſtituere videantur. Inſerta crenae prominentia cum ea articulum efficiat ope axis ferrei *g* per copulatorum parallelepipedorum mediam craſſitiem traiecti, vt parallelepipedum B vltro citroque moueri poſſit, immobile manente inferiore A.

5. Superius parallalepipedium B in cochleam ligneam *b* deſinat, quae per foramen *b* tecti ciſtulae Y longius transmittatur, vt inclinari et reclinari in foramine longo *b*, et ſupra tectum ciſtulae cochlea foemina *c* firmari poſſit.

6. In-

6. Inferius parallelepipedum A $\frac{2}{3}$ dig. a fundo pertundatur in medio quoad longitudinem fiſſura *d* 5 dig. longa $\frac{1}{2}$ dig. lata.

7. Pone parallelepipedum compoſitum AB fere ad tergum ciſtulae erigatur aliud parallelepipedum ligneum C 5$\frac{1}{2}$ dig. altum et priori aequale in latitudine et craſſitie, diſtet a parallelepipedo A 1. dig, fiſſuram in ſuperiori parte habeat 5. dig. longam $\frac{1}{2}$ dig, latam *e*, ita vt reſpondeat fiſſurae *d* prioris parallelepipedi A.

8. Vlterius ordinetur ad fiſſuram *e* aſſerculus D in eam inſerendus, vt ibi ex axe *g* traiecto mobilis ſit, et per fiſſuram *d* parallelepipedi A transeat, longus ſit aſſerculus quantum ciſtula intus permittit, latus 1$\frac{2}{3}$ digit. craſſus $\frac{2}{3}$ dig. Axis ferreus *g* latius caput habeat, poſtea quadrangularis, in medio cylindriformis et deſinat in cochleam marem, vt per cochleam foeminam adductam fiſſura *e* cogi poſſit ad aſſerculum D arctius amplectendum, motumque eius difficiliorem aliquantulum reddendum.

9. In ea parte qua fiſuram *d* parallepipedi A tranſit aſſerculus D exſcindatur fruſtum ſuperius et inferius per totam aſſerculi anteriorem partem, vt reſidua eius portio referat priſma *ſ* quadrangulare $\frac{1}{2}$ dig. craſſum, $\frac{2}{3}$ altum.

10. Huic priſmati *ſ* accommodetur alius aſſerculus E, longus prout ciſtulae longitudo admittit, latus 2. dig. craſſus 1$\frac{1}{4}$ dig. In eius medio latitudinis fiat foramen quadrangulare *g* vt per illud priſma *ſ* aſſerculi D transmitti poſſit.

11. Exſcindatur et hic aſſerculus E vtrinque vt tantum in medio clypeus cum foramine g remaneat brachiis *hh* vtrinque prodeuntibus.

12. Brachia *hh* per mediam craſſitiem verticalem a clypeo vsque ad extreme fere brachiorum crenis transfoſſis *kk* pateant cochleis GG ligneis gracilioribus imponendis.

13. Cochleae GG infra medium latiori gaudeant interſtitio *ii*, crenulis brachiorum *hh* committendo, craſſitie cochlearum inferioris partis aequali; ſuperior pars *ll* cochlearum GG craſſior ſit, vt in crenularum lateribus inſiſtere, cochleis foemineis *yy* inferioribus adductis, poſſint.

14. Tandem cuiuis ſupereminenti cochleae *ll* accommodentur duae cochleae foeminae *mm* et *nn*, quarum ſuperiores *mm* referant orbiculum inferiores *nn*, octangulares ſint vt vtraeque *n* in *m* adductae ſibi incumbant, nec locum ſitus mutent.

15. Vltimo loco perforetur priſma *ſ* aſſerculi D in anteriori parte *o* foramine oblongo, transmittatur clauus ferreus *p* capite perforato vt gyrari poſſit, et dimidiae parti inferiori cochlea ſit inciſa, indatur illa poſt transmiſſionem per priſmatis foramen *o* in cochleam foemineam *q* quae ſurſum et deorſum moueri poſſit. Clauus capite ſuo latiori incumbat in priſma *ſ*, et recte conſtitutis omnibus adducatur cochlea foemina mobilis *q* ad fundum ciſtulae X vt firmiter erectus maneat clauus absque vacillatione. Sic priſma *ſ* altius attolli nequibit, quam

quam claui caput permittit, quanquam depreſſioni omnino obediat.

16. Fulcimentum hoc tali modo vſui accommodatur : In parallelepipedum ſuperius B pangatur cultellus *z* ſcapum bilancis recipiens, impoſitoque lineali BBB cum ſuo perpendiculo *w* in antecedentibus bilancibus deſcripto attendatur, vtrum cultellus *z* ſitum horizontalem habeat, ſi ſcil. perpendiculum *y* linealis BBB aequaliter ſuperius et inferius diſtet a lamina *w* linealis BBB dependente, hoc ſi non eſt, inclinetur vel reclinetur parallelepipedum B vsque dum deſideratus obtinetur perpendiculi ſitus, tunc adducitur cochlea foeminea *c* quae ſupra tectum eſt, et firmatur parallelepipedum ſuperius B.

Dependentibus bilancis lancibus ſubiiciantur cochleae foeminae *mm* orbiculares protrudendo vel retrahendo aſſerculum E in priſmate *ſ* aliquantulum durius mobilem, vt orbiculis *mm* iſtis lances immineant.

Porro attollantur gyrando orbiculi *mm*, vt in iſtos leuiter incumbant lances, et cochleae *nn* adducantur ne orbiculi vacillent ſed ſtabiles reddantur. Tandem clauus ferreus *p* tamdiu circumducatur in ſua foemina *r*, donec caput eius in ea altitudine exiſtat, in qua omnem aſcenſum priſmatis *ſ* impedit, quo lances turbari poſſent, atque hic ſitus claui ſeruetur per cochleam *q* ſundo adductam.

17. Iniectis itaque in lances onere atque pondere deprimatur priſma *ſ*, tunc libere pendet bilanx et oneris pondus determinabit. Ad reſtituendam bilanci quietem, reducatur priſma *ſ*, vt in caput claui impingat, tunc

lan-

lances quieſcent, nec tamen bilanx alteratur aut commouetur.

Cap. VI.

De Ponderibus.

maxime quae ad bilancem probatoriam ſpectant.

1. Non tantum de vtilitate, ſed et de neceſſitate mathematico eſt, ſcire determinationem nonnullorum ponderum, maxime, quae ad bilancem probatoriam pertinent, eaque ratione et indolis et formationis intelligere. Hinc ſequentem breuem quidem, ſed ſufficientem manuductionem ad vtrumque ſuppeditabo.

2. Centenarius eſt illud maximum genus ponderum, quo in communi vita, vt in et re metallurgica vtuntur artifices in Germania: Eſt vero pondus commune vbique locorum vtplurimum eiusdem grauitatis, ſed diuerſis in locis diuerſimode diſtributus in Pondo. Sic Centenarius Norimbergae et Lipſiae diuiditur in 100. lbr. Coloniae ad Rhenum in 102. lbr. et tamen vterque Centenarius eandem habet grauitatem: pondo vero Colonienſe pendet minus Norimbergenſi.

3. Hic vero in Ruſſia vulgarirer maximum pondus eſt quod vocatur *Pud.* Datur quidem apud Ruthenos adhuc aliud ingens pondus *Perkoiwitz* dictum, ſed non adeo in vſu eſt, et fere obliuioni datum, niſi quod

quod Nautae eo adhuc vtantur quibus vocatur ein Schiff-Pfund. Haec itaque introducta eſt ſubordinatio Ponderum Rutenicorum:

1	Percoiwitz	continet	10	Pude
1	Pud	- - - - -	40	Pondo
1	Pondo	- - -	32	Loth
1	Loth	- - -	3	Solotnik
1	Solotnik	- - -	6	Gran.

4. Diuiditur vt dixi Centenarius Norimbergicus in 100 Pondo ſeu libras, et exprimitur ſigno 1 C.

1	Pondo	in	2	Marcas -	1 lb.
1	Marca	in	8	Vncias - -	1 Mrc.
1	Vncia	in	2	Lothones -	1 ℥
1	Lotho	in	4	Drachmas -	1 L. vel $\frac{1}{2}$ ℥
1	Drachma	in	$\frac{32}{32}$	partes - -	1 ʒ

Drachma diſpeſcitur dimidiando ſemper partes ita, vt

1 Drachma ſeu Quintillum (ein Quentchen) ſit		$\frac{32}{32}$ part
$\frac{1}{2}$ Drachma	— — — —	$\frac{16}{32}$
$\frac{1}{4}$ Drachma quae vocatur	denarius (ein Pfenning pf.)	$\frac{8}{32}$
$\frac{1}{8}$ Drachma	Obulus (ein Heller hl.)	$\frac{4}{32}$
$\frac{1}{16}$ Drachma	$\frac{1}{2}$ Obulus ($\frac{1}{2}$ Heller)	$\frac{2}{32}$
$\frac{1}{32}$ Drachma	$\frac{1}{4}$ Obulus ($\frac{1}{4}$ Heller)	$\frac{1}{32}$

5. Ad normam vero Norimbergicorum ſi examinantur pondera Rutenorum, inueni, talem dari proportionem:

1 lb. Ruten. aequatur 28 Loth $\frac{1}{4}$ quentl. Norimberg.

Ergo

512 lb. Rutenica dant	449 lb. Norimbergica				
40 lb. — — —	35 lb.	2 L.	2	ꝗ N.
10 lb. — — —	8 lb.	24 L.	$2\frac{1}{2}$	ꝗ N.
1 lb. — — —		28 L.	$\frac{1}{4}$	ꝗ N.
1 Loth. — — — —			$3\frac{17}{32}$	ꝗ N.

6. Medica pondera ita ſe habent :

1 lb. Medicum eſt 12 Vnciarum Norimb.

		ſeu	98304 Elem.
1 ℥ — — —	2 L. Nor.	ſeu	8192
1 L. ſeu $\frac{1}{2}$℥ ſeu ℥ß	4 Dr. N.	ſeu	4096
1 ʒ — — —	3 Scrup.	ſeu	1024
1 ℈ — — —	20 Grana	ſeu	$341\frac{1}{3}$
1 gr. — — —		ſeu	$17\frac{1}{15}$

7. In re Metallurgica et Monetaria artifices vtplurimum vtuntur Marca vel Norimbergenſi vel Colonienſi. Cum Norica conuenit Lipſienſis.

8. Eſt vero inter vtraque pondera ratio talis :

102

102 lb. Colonienſia dant 100 lb. Norimbergenſia.

131072 Elementa vnius lb. Col. dant 128512 elementa lb. Noric.

1 Marca Colonienſis dat 15 Loth. 11 pf. (ſeu $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ part. drachmae) Noricas.

67 Ducati Colonienſem faciunt Marcam.

$68\frac{1}{2}$ Duc. faciunt Marcam Nor.

9. Ad ακριβειαν ponderum quod attinet, aſſumſerunt artifices particulas minimas, quarum 1. lb. continet 131072. Haec elementa ponderum dicuntur, et in eas reſoluitur pondo vniuscuiusque ciuitatis, Mihi vero ope bilancis nouiter inuentae et Cap. II. deſcriptae vlterius progredi licuit, ita, vt 1 lb. diuiſerm in 4194304 particulas, quarum differentiam haec noſtra bilanx prodit.

10. Solent Metallurgi Argenti pondus efferre, vel per denarii vel per granorum pondus (Pfenning und Gran=Gewicht.)

Eſt vero 1 Den. Pf. valor	$\frac{1}{4}3$	vel	256 Element.
1 Lothonis valor	6 gran.	vel	4096
1 gran.	3 graen.	vel	$682\frac{2}{3}$
1 graen	— — —		$227\frac{5}{9}$ Elem.

11. Auri pondera vocantur Carrath, Grana, et Graena (quaſi Granilla.)

1 lb. dat 48 Carrath
1 Marc 24 Carrath
1 Vncia 3 Carrath
1 Carrath dat 4 gran. vel 12 graen.
1 Granum 3 graen.

12. Proportio inter iam recenſita pondera ea eſt, quam ſequens tabula parallela exhibet:

Pondera communia	Denaria Pfenning-Gewicht.	ad ☽	ad ☉	Medica	Elem. comm.	Elementa minima
1 lb.	1 lb.	2 Marc.	48 Carr.	16 ℥	131072	4194304
1 Mrc.	1 Mrc.	16 Loth.	24	8 ℥	65536	2097152
1 ℥	1 ℥	1 ℥	3	1 ℥	8192	262144
1 L.	1 L.	1 L.	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ℥	4096	131072
1 Ꝗ	1 Ꝗ ſeu 4 Pf.	18 gr.	18 gr.	1 ʒ	2048	65536
$\frac{1}{2}$ Ꝗ	$\frac{1}{2}$ Ꝗ 2 Pf.	9	9	$1\frac{1}{2}$ ℈	1024	32768
$\frac{1}{4}$ Ꝗ	$\frac{1}{4}$ Ꝗ 1 Pf.	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	15 gr.	512	16384
$\frac{1}{8}$ Ꝗ	$\frac{1}{8}$ Ꝗ 1 Hl.	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	256	8192
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$ Hl.	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{4}$	128	4096
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$ Hl.	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$1\frac{7}{8}$	64	2048

13. Obiter hic notanda aureae monetae determinata grauitas.

1 Marc ſeu 16 L. Noricae faciunt

65536	Element.	Colonienſes item 65536
24	Carath.	24 Carr.
$68\frac{1}{2}$	Ducatos	67 Duc.
$71\frac{1}{4}$	Coronas	70 Cor.
$73\frac{3}{4}$	Florenos Rhen.	72 Flor. Rhen.

Ducati hoc ſingulare habent, qnod per vnitates, ſic vocatas (Ducaten Esgen) ponderentur, vocantur vulgariter Eſchen.

67 E-

67 Eſchen dant 1-3 Colonienſem
$68\frac{1}{2}$ Eſchen faciunt 1-3 Norimbergenſem.
4288 Eſchen dant 1 Marc. Colon. ſeu 67 Ducatos
64 Eſchen $978\frac{10}{67}$ El. Colon. 1 Ducat.
1 Eſchen $15\frac{19}{67}$ El. Colon.

1 Imperialis argenteus (ein Banco Thaler) aequiponderat 2 Loth Colonienſibus vel 8192 Elem. Colon. ut et 1 Loth $15\frac{1}{2}$ Pf. Norimberg. vel 8064 El. Noric.

1 Duc. pendet $956\frac{48}{67}$ El. Nor. ſed Colon. $978\frac{10}{67}$ El.
1 Corona $920\frac{3}{10}$ $936\frac{8}{65}$
1 Flor. Rhen. $888\frac{1}{18}$ $910\frac{2}{9}$

NB 1 Ducatus Hungaricus ſeu Cremnicenſis conſtat $963\frac{61088863}{145992824}$ (ſeu $\frac{62}{145}$) El. Nor. ſed Col $985\frac{67}{133}$

14. Metallurgia docimaſtica ſingularia pondera minuta habet, vices maiorum gerentia, et eorum proportionatam grauitatem ſignificantia. Aſſumitur enim ab exercitatis Metallurgis vtplurimum 1 Drachmae ordinariae pondus, et nominatur 1 Centenarius probatorius, ex ea deinde reliqua pondera maioribus proportionalia deducuntur. Item 1 Drachmae pondus aequiparatur 1 Marca ſeu 16 Loth, ex qua proportiones caeterorum ponderum probatoriorum deriuantur aequiſignificantes verorum ponderum proportionibus.

15. Qui fodinarum metalliferarum inteſtina ſcrutantur (Berg=Probierer) vtplurimum vtuntur ponderibus probatoriis ſequentibus, eaque in cellulis aſſeruatoriis hoc modo collocant atque diſponunt: Diuiſam ſc. in ſuas partes drachmam, cui centenarii, partibus vero librarum Lothonum atque Drachmarum nomen imponunt.

1. Drachma valet	100 lb.	et continet elem.		1024
Eius dimidium	50 lb.	—	—	512
ſemper dimi-	25 lb.	—	—	256
diando nume-	16 lb.	—	—	$163\frac{21}{25}$
rum antece-	8 lb.	—	—	$81\frac{23}{25}$
dentem vsque	4 lb.	—	—	$40\frac{24}{25}$
ad 16 lb. quod	2 lb.	—	—	$20\frac{12}{25}$
alia methodo	1 lb. vel	32 Loth	—	$10\frac{6}{25}$
inuenitur de		16 L.		
qua §. 16.		8 L.		&c.
Poſtea ad reli-		4 L.		
qua pondera		2 L.		
iterum dimi-		1 L.		&c.
diando fit		$\frac{1}{2}$ L.		
progreſſus		1	₰	&c.
		$\frac{1}{2}$	₰	
		$\frac{1}{4}$	₰	
		$\frac{1}{8}$	₰	
		$\frac{1}{16}$	₰	
		$\frac{1}{32}$	₰	

16. Admodum vero difficile eſt grauitatem 16 pondo inuenire in ponderibus his probatoriis, hinc meam praxin exponam:

1. Fiat ex filo orichalceo ducto et tenui (aus einer dünnen meßingenen Clauicordii Sayten) pondus 25. lb. probatoria pendens.

2. Circino diuidatur illud filum in 5 partes, et forficula diſcindatur per puncta diuiſionis, partes bilance exami-

aminentur, vtrum aequale inter ſe pondus habeant, et coniunctim conueniant cum pondere 25 lb. probatorio. Erit hoc modo vnum fruſtulum aequale 5. lb.

3. Fruſtulum vnum iterum eodem modo diſſecetur in 5 partes aequales, priori modo examinandas. Et dabit 1 fruſtulum 1 lb.

4. Tandem in lancem eandem imponantur, 3. fruſta de maioribus et 1. de minoribus et habebis pondus 16 lb. probatoriorum.

5. His aequilibretur vnicum fruſtum metallicum, figuram reliquorum ponderum ſimilem referens, et deſiderio erit ſatisfactum.

17. Vltra $3\frac{1}{2}$ drachmae probatoriae progredi neceſſe non eſt, quandoquidem et haec diſpartitio altioris indaginis aſt, quam, vt a vulgari bilance docimaſtica exſpectari poſſit.

18. Monetarii alio modo vtuntur Drachma. Eius enim valorem 1 Marcae; ſeu 16 Lothonibus aequalem ponunt, et deinde dimidiatas partes, tamquam pondera probatoria, veris ponderibus ſubſtituunt, et tunc tale emergit ſyſtema ponderum probatoriorum.

1 Drach-

			Elem. vulg.	Element. minima.
I Drachma				
aequiualet	16 L. et pendet -		1024	vel 32768 El.
	8 L. — — —		512	16384
	4 L. — — —		256	8192
	2 L. — — —		128	4096
Vulgariter	1 L. — — —		64	2048
minimum	$\frac{1}{2}$ L. — — —		32	1024
pondus eſt	1 ℔ —		16	512
$\frac{1}{16}$ ℔. Sed	$\frac{1}{2}$ ℔ —		8	256
hic etiam	$\frac{1}{4}$ ℔ ſeu	1 Pf.	4	128
$\frac{1}{512}$ ℔ ope	$\frac{1}{8}$ ℔	1 Hl.	2	64
nouae bilan-	$\frac{1}{16}$ ℔	$\frac{1}{2}$ Hl.	1	32
cis detegitur	$\frac{1}{32}$ ℔	$\frac{1}{4}$ Hl.		16
atque pro-	$\frac{1}{64}$ ℔	$\frac{1}{8}$ Hl.		8
dit.	$\frac{1}{128}$ ℔	$\frac{1}{16}$ Hl.		4
	$\frac{1}{256}$ ℔	$\frac{1}{32}$ Hl.		2
	$\frac{1}{512}$ ℔	$\frac{1}{64}$ Hl.		1

19. Rei Monetariae Magiſtri (Münz=Waradein) vtuntur in diiudicando ſeu determinando iuſto cuiuslibet monetae pretio Denario directorio (des Richt=Pfennings) qui ex elementis pondo vnius conſtruitur, cui egregie inſeruit diuiſio vnius pondo in 4194304 Elementa, quandoquidem diuiſio 1 lb. in 131072 Elementares partes vulgares ad hunc denarium determinandum inſufficiens omnino deprehenditur, quemadmodum ſequens tabula indicat.

1 lb.

	Elem. vulg.	Elem. minima.
1 lb. continet	131072	4194304
1 Marc. -	65536	2097152
8 L. - -	32768	1048576
4 L. - -	16384	524288
2 L. - -	8192	262144
1 L. - -	4096	131072
$\frac{1}{2}$ L. - -	2048	65536
1 ꝗ - - -	1024	32768
$\frac{1}{2}$ ꝗ - - -	512	16384
$\frac{1}{4}$ ꝗ - - -	256	8192
$\frac{1}{8}$ ꝗ - - -	128	4096
$\frac{1}{16}$ ꝗ - - -	64	2048
$\frac{1}{32}$ ꝗ - - -	32	1024

	Elem. vulgaria.	Elem. minim.
$\frac{1}{64}$ ꝗ	16	512
$\frac{1}{128}$ ꝗ	8	256
$\frac{1}{256}$ ꝗ	4	128
$\frac{1}{512}$ ꝗ	2	64
$\frac{1}{1024}$ ꝗ	1	32
$\frac{1}{2048}$ ꝗ		16
$\frac{1}{4096}$ ꝗ		8
$\frac{1}{8192}$ ꝗ		4
$\frac{1}{16384}$ ꝗ		2
$\frac{1}{32768}$ ꝗ		1

20. Haec ſunt potiſſima, quae de ponderibus accuratioribus notatu digna atque ſcitu neceſſaria iudicaui, quandoquidem et Mathematico et Phyſico multum intereſt ſtructuram bilancis, et ponderum proportiones intelligere, eamque diiudicare poſſe, ſi feliciori paſſu ad intimiora vtriusque ſcientiae progredi, et theoriam ad praxin accommodare, vel praxin ex theoria deducere geſtiuerit.

DE PLANETARVM STATIONIBVS.

Auctore

F. C. Maiero.

I.

M. Iun. 1727.

KEplerus in Rudolphinis pag. 72. hoc ſibi problema ſoluendum propoſuit : *Cuilibet anomaliae planetae ſuos commutationis angulos aſſignare in quibus is fiat ſtationarius.* Eidem quoque ſuam nauauit operam Hallaeus, cuius ſolutionem Keilius in lectionibus aſtronomicis p. m. 239. protulit. Duo problematis huius ſunt caſus : Primus tam terrae quam planetae in ſuis orbitis data aſſumit loca, ſed orbitarum ſiue apſidum poſitionem non determinat, quippe quae demum ex inuenta commutatione ſtationaria determinanda venit; Alter caſus datam ſtatuit hanc poſitionem, vna cum anomalia planetae ſolius, anomalia autem terrae ſtationaria inuenienda eſt. Hunc poſteriorem quidem caſum in animo habuerunt laudati Aſtronomi , ſed ſi ſolutiones eorum ſpecto, non niſi primo, nec ei plene, ſatisfecerunt : Keplerus ſolutione utitur indirecta, regula, quam vocant, falſi nixa; item, quae tanquam data aſſumenda ſunt, vti celeritatum ratio, et tangentium anguli, ipſi non niſi vt prope vera cognita fuerunt, ignorabat enim theoremata quibus data haec determinantur: Hallaeus telluris orbitam ſupponit circularem, quod quidem prope verum eſt,

eſt, at non veriſſimum. Ex ſolutione primi caſus adornauerunt ſolutionem ſecundi,ſed plane indirectam, asſumunt enim ambo locum terrae vt cognitum ex coniectura, qui tamen quaeritur, eumque poſtmodum, ſi neceſſe ſit, limant. Hiſce naeuis, ſi qui ſunt, in praeſenti ſcripto mederi conabor, oſtenſurus viam directam qua vtriusque caſus quaeſita aequationibus algebraicis definiuntur, licet id non nemini impoſſibile viſum fuerit. Nullis ad id indigeo principiis nouis, omnia fere iam ſuppeditat Keilius in lectionibus aſtronomicis,ſicuti ex allegationibus poſthac intelligetur. Sunt,praeter hoc problema, alia de ſtationibus apud Mathematicos celebria, a quibus tamen nunc abſtineo, donec, quae meditatus ſum de illis, melius digeſſero.

2. Iuuat abinitio monere,me ſubſtruere dicendis ſyſtema copernicanum,et leges motuum keplerianas;Supponere etiam orbitas planetarum ad planum eclipticae reductas. Caeterum definitiones ſtationum aliarumque rerum aſtronomicarum vulgarium hic non inculco, lectorem poſtulans aſtronomiae non ignarum. Id vnicum noto, me per *triangulum parallacticum* intelligere triangulum rectilineum formatum ab interuallis planetarum a ſole,et linea planetas iungente: *Terra* vero in ſequentibus etiam ſub *planetae nomine* veniet, quod breuitatis cauſa facio, et dum de duobus loquor planetis ſuperiore vno, inferiore altero, alteruter ſemper pro terra haberi poteſt.

3. Propter motum planetarum continuum, anguli, in triangulo parallactico, continuo mutantur; muta-

tionem igitur alicuius anguli tempuſculo infinite paruo factam vocabo *mutationem momentaneam.* Item arcum, quem planeta ex ſole viſus tempuſculo infinite paruo percurrere ſupponitur, vel eiusdem correſpondentem angulum ad ſolem, vocabo planetae *incrementum angulare.*

4. *Mutationes momentaneae angulorum, in triangulo parallactico, ad planetas ſtationarios, ſunt aequales incrementis ad ſolem angularibus eodem tempuſculo factis.*

Fig. I. Triangulo parallactico OSI ſtationario iungatur aliud O*si*, in quod nimirum prius triangulum OSI poſt tempuſculum infinite paruum abiiſſe cenſendum eſt: Ob ſtationis naturam erit linea viſoria IS parallela ipſi *is*. Fiat porro SP parallela lineae O*s*, et RI parallela ipſi O*i*, vt habeatur angulus PSI = ang. OS*i*, item angulus O*is* = ang. RIS, et praeterea angulus PSO = ang. SO*s* angulusque RIO = ang. IO*i*. Sunt autem anguli PSO et RIO mutationes momentaneae angulorum ad planetas ſtatonarios, et anguli SO*s* atque IO*i* ſunt incrementa ad ſolem angularia, ergo haec illis aequalia ſunt ſtationum tempore. Q. E. D.

5. Ex ſola inſpectione figurae, qua ad demonſtrationem vſus ſum, intelligitur, vnam mutationem momentaneam eſſe priuatiuam, ſi altera ſit poſitiua. Vt haec diuerſitas tollatur, pro angulo ad planetam inferiorem (OIS) vſurpabo eiusdem deinceps poſitum, cuius conſequenter mutatio momentanea eodem ſigno gaudet, quo et altera ad ſuperiorem planetam. Id praeterea quoque patet, eſſe hunc deinceps poſitum ſtationis tempore

re ſemper acutum, aeque ac angulus ad ſuperiorem planetam ISO. Cetera notandum eſt hoc ipſum theorema, quod demonſtraui, eſſe fundamentum cui innititur ſolutio problematis ſequentis. Reliqua enim quae ſequuntur theoremata motum coeleſtem in genere ſpectant, nec ad ſolas ſtationes pertinent, faciunt tamen ad ſolutionis dandae perfectionem.

6. *Incrementa angularia ad ſolem ſunt in ratione compoſita, ex directa ſubduplicata parametri orbitae, et inuerſa duplicata diſtantiae a ſole.*

Diſtantia ſuperioris a ſole OS ponatur $=D$, diſtantia inferioris $=d$. Parameter orbitae ſuperioris ſit $=P$ et parameter inferioris $=p$. Sit praeterea incrementum angulare ſuperioris $=SOs$, et incrementum angulare inferioris $=IOi$, demonſtrandum eſt eſſe $SOs:IOi = \frac{\sqrt{P}}{DD}:\frac{\sqrt{p}}{dd}$. Quia ſectores SO*s* et OII (qui propter infinitam paruitatem pro triangulis rectilineis haberi queunt) eodem tempore deſcripti ſunt, erit per naturam motus coeleſtis ſector SO*s* ad ſectorem IO*i* vti $\sqrt{P}$ ad $\sqrt{p}$ (vid. Keilii lect. Aſtron. p. m. 364) Centro O radiisque OS et OI deſcribantur arculi infinite parui SQ et IR, qui pro rectis habeantur lineolis ad radios OS et O*i* normalibus, erit proinde area ſectoris ſuperioris ad aream inferioris vti OS . SQ ad OI . RI. ſiue, vt D.SQ ad *d* . RI; eſt vero $D.sQ:d.RI = \sqrt{P}:\sqrt{p}$. ergo quoque $SQ:RI = \frac{\sqrt{P}}{D}:\frac{\sqrt{p}}{d}$. Deſcribatur porro arculus VT radio OI, ita fiet $VT:SQ = d:D$, hanc ergo *Fig. II.*

conferendo proportionem cum proxima antecedente habetur ex aequo VT : RI$=\frac{\surd P}{DD}\cdot\frac{\surd p}{dd}$. Et quia VT:RI$=$ SOs : IOi erit etiam SOs: IO$i=\frac{\surd P}{DD}:\frac{\surd p}{dd}$. Q. E. D.

7. Quoniam ſtationis tempore mutatio momentanea anguli ad ſuperiorem planetam eſt ad mutationem momentaneam anguli ad inferiorem deinceps, vti incrementum angulare ſuperioris ad incrementum angulare inferioris planetae, (§. 4. et 5.) erit tempore ſtationis mutatio momentanea ſuperioris ad mutationem inferioris, vti $\frac{\surd P}{DD}$ ad $\frac{\surd p}{dd}$. vi antecedentis theorematis.

8. *Mutatio momentanea ſinus anguli ad ſuperiorem, eſt ad mutationem ſinus ad inferiorem, vti diſtantia inferioris, ad diſtantiam ſuperioris a ſole.* Propter mutationem quae momentanea eſt, diſtantiae planetarum nil mutantur, ergo ratio ſinuum manet quoque eadem, ſunt enim illi vti oppoſitae diſtantiae a ſole; manente autem ratione eadem, neceſſe eſt augmenta vel decrementa ſinuum eandem quoque retinere rationem. Q. E. D.

9. *Si arcus vel angulus aliquis quantitate infinite*
Fig. III. *parua creſcat vel decreſcat, erit tale incrementum arcus, ad incrementum quo ſinus eiusdem augetur eodem tempore, vti radius ad coſinum dicti arcus.* Sit arcus propoſitus $=$BE, ſinus eius $=$AB, et coſinus $=$AC; incrementum arcus minimum $=$Bb, adeoque incrementum ſinus $=$Db habeatur arculus Bb pro recta, erunt hoc modo triangula ABC et BbD ſimilia, conſequenter Bb : D$b=$BC : AC. Q. E. D.

10. Ponatur coſinus anguli ad ſuperiorem planetam

tam $=C$ et coſinus ad inferiorem $=c$. Praeterea ſit mutatio momentanea ad ſuperiorem $=m$ et mutatio ad inferiorem $=n$, erit, per antecedens theorema, mutatio ſinus ſuperioris, ad mutationem ſinus inferioris momentaneam vti mC ad nc.

11. Et quoniam ſtationum tempore eſt $m:n = \frac{\sqrt{P}}{DD} : \frac{\sqrt{p}}{dd}$ (§. 7.) erit hoc in caſu mutatio ſinus ſuperioris momentanea, ad mutationem inferioris vti $\frac{\sqrt{P}}{DD}C$ ad $\frac{\sqrt{p}}{dd}c$.

PROBLEMA.

12. *Datis anomaliis tam terrae quam planetae inuenire commutationem qua ſtatio accidit.*

Propter datas anomalias dantur quoque planetarum a ſole diſtantiae, nimirum $OS=D$ et $OI=d$. Ponatur anguli intercepti SOI (qui commutationi deinceps eſt) coſinus $=y$ erit (per trigonometrica mea hiſce commentariis exhibita pag. 29. §. 23.) coſinus anguli ad $S = \frac{rD-dy}{\sqrt{(DD-2Ddy:r+dd)}}$, et coſinus anguli ad I deinceps $= \frac{Dy-rd}{\sqrt{(DD-2Ddy:r+dd)}}$, ergo mutatio ſinus ſuperioris momentanea eſt ad mutationem ſinus inferioris momentaneam (per §. 11.) vt $\frac{\sqrt{P}(rD-dy)}{DD}$ ad $\frac{\sqrt{p}(Dy-rd)}{dd}$, eſt vero etiam (per §. 8.) vti d ad D, ergo facta aequationis legitima reductione inuenietur $y = rDd\frac{\sqrt{P}+\sqrt{p}}{DD\sqrt{p}+dd\sqrt{P}}$. Q. E. I. *Fig. I.*

13.

13. Lubet inuentam regulam exemplo illuſtrare deſumto ex tabulis rudolphinis pag. 72. vbi datur log. $D = -32532$ (quae eſt diſtantia Martis a Sole) et $ld = -1092$ diſtantia terrae a ſole) item $lP = -110550$ et $lp = -69283$. Inſtruam vero calculum methodo a me in hiſce commentariis pagg. 20. 22. exhibita. Eſt itaque $l\sqrt{P} = -55275$ et log. $\sqrt{p} = -34641$. Aſt quia logarithmi tales priuatiui ſunt, mutentur prius in poſitiuos vicarios, addendo communem maiorem (e. g. 60000) ſic fiet

Vic: $l\sqrt{P} = 4725$ cuius arcus $= 72^\circ, 31', 30''$,
Vic: $l\sqrt{p} = 25359$ cuius arcus $= 50, 53, 47$,

Semiſumma	$= 61, 42, 38$, log.	12719
Semidiffer.	$= 10, 48, 51$, antil.	1792
		14511
	dematur -	60000
	$\log.(\sqrt{P}+\sqrt{p}) =$	-45489
	$\log. D =$	-32532
	$\log. d =$	- 1092
	$\log. rDd(\sqrt{P}+\sqrt{p}) =$	-79113

log.

log. $DD = -$ 65064
$l\sqrt{p}$ $= -$ 34641

$lDD\sqrt{p} = -$ 99705
addatur . . 100000

295 arcus eius $= 85^\circ, 36', 0''$
log. $dd = -2184$
$l\sqrt{P} = -55275$

-57459
addatur 100000

42541 arcus eius $= 40^\circ, 48', 22''$.

Semiſumma $=$ 63, 12, 11. logar. $=$ 11360
Semidiffer. $=$ 22, 23, 49. antilog. $=$ 7843

19203
dematur 100000
log. $(DD\sqrt{p} + dd\sqrt{P}) = -80797$
log. $rDd(\sqrt{P} + \sqrt{p}) = -79113$

log. y $=$ 1684

ergo angulus ad ſolem	$=$	10°,	$29'$,	$10''$.
et commutatio	$=$	169,	30,	50.
Keplerus habet	$=$	169	53,	30.
exceſſumque committit	$=$ - -		22,	40.

Aliud exemplum idem Keplerus l. c. adducit, vbi mercurium et terram in apheliis ponit et commutationem ſtationariam indirecta ſua methodo eruit $= 25^\circ, 20'$, quae debebat eſſe $= 25^\circ, 33', 6''$.

14. Atque ita primo caſui problematis kepleriani de ſtationibus abunde ſatisfactum eſt. Quod alterum caſum attinet, (in quo dantur apſidum ad inuicem poſitio, vniusque planetae anomalia, quaeritur autem altera ſtationaria;) attendenti facile patebit, poſſe, ope antecedentium, ſolutionem eius exhiberi quoque aequatione algebraica. Verum quia illa ad ſextam dimenſionem aſcendit, nec vlla eam deprimendi ſpes eſt, inutilem prorſus ad praxin aſtronomicam cenſeo. Quamobrem eius loco commendare malo indirectam ſolutionem, ſumendo anomaliam quaeſitam ex coniectura prope veram, atque ita inquirendo commutationem ſtationariam per problema antecedens, qua inuenta poſitio prima corrigatur, et calculus repetatur donec ſibi conſentiat et veritatem exacte prodat.

PROBLEMATIS Traiectoriarum Reciprocarum Solutio.

Auctore

Leonhardo Eulero, Baſil.

I.

M. Iul. 1727. PRoblema, de quo in hoc ſchediaſmate agere conſtitui, eſt celebre illud et in Actis Lipſ. multum agitatum, de inueniendis curuis, quae intra datas parallelas eaedem recto et inuerſo ſitu poſitae et ſecundum parallelarum directionem hinc inde mo-

motae,mutua interſectione vbiq; angulum eundem conſtituunt,Problema in Act.Lipſ. Suppl. T. VII. a beate hic defuncto Nicolao Bernoulli propoſitum Ita autem cum hoc problemate res ſe habet, vt infinitae, tam algebraicae, quam tranſcendentes curuae ſatisfaciant. Quapropter ad plenam eius et perfectam ſolutionem requiritur, vt exhibeatur methodus,qua curuae ſatisfacientes omnes inueniri queant, ſimpliciſſimae autem tam algebraicae quam tranſcendentes re ipſa eruantur.

II. Dedi nuper, occaſione quaeſtionis, quae Cel. Bernoullio cum Anglo quodam eſt nomen celante, de inueniendis traiectoriis reciprocis algebraicis ſimpliciſſimis, in Act. Lipſ. A. 1727 methodum, qua ex quolibet curuarum ordine, excepto ſecundo et tertio, (ex quorum poſteriore quidem alia via curua ſatisfaciens inueniri poteſt), vna ad minimum traiectoria reciproca exhiberi poteſt, vna cum generali modo, omnes traiectorias reciprocas algebraicas ex curuis cuſpide et circa cuſpidem ramis ſimilibus et aequalibus praeditis et algebraicis, deriuandi. Animus hic eſt generalem huius problematis ſolutionem largiri, ex eaque infinitas formulas generales algebraicas easque maxime foecundas deducere. Quibus adiungam problematis cuiusdam agnati, de inueniendis traiectoriis reciprocis vno plures axes habentibus,ſolutionem.

III. Problema ad analyſin magis accommodatum ſic ſonat: *Inuenire curuam* CBD *circa axem* AB, *talem, vt ductis duabus rectis* MP, NQ, *ab axe vtrinque aequidiſtantibus eique parallelis, ſumma angulorum* PMB+ *Fig. I.*

QND, *ſit vbique conſtans*, *aequalis nimirum duplo anguli* DBA, *quem axis cum curua conſtituit.* Inuerſa enim CBD circa axem AB, cadet applicata QN ſuper PM, tum moueatur, donec applicatae QN punctum N incidat in punctum M, et curua ſic ſitu inuerſa ſit *cbd* oportet angulum interſectionis BM*d* eſſe conſtantem: Sunt autem anguli PM*d*, et QND aequales, conſequenter ſumma angulorum, PMB+QND, debet eſſe conſtans. Creſcentibus ergo ex vna parte axis AB, angulis applicatarum cum curua, ex altera parte tantundem decreſcere debent.

IV. Ducta ad axem AB, normali PQ, erit AP=AQ, ducantur duae proximae reſpondentes applicatae, *pm*, *qn*. Erit P*p*=Q*q*. Ducantur ex M et N, tangentes MR, NS, vt habeantur anguli RM*m*, SN*n*, quorum ille eſt decrementum anguli PMB, hic incrementum anguli QND. Quocirca erit ex conditione problematis RM*m*=SN*n*. Vnde natura curuae inueſtigari debet.

V. Sumatur vbique in applicata MP producta, PF, proportionalis angulo RM*m*, aſſumto elemento P*p*, abſciſſae AP pro conſtante, erit punctum F in curua quadam, cuius diameter erit axis traiectoriae BA, erit enim vbique PF=QG. Quare tota difficultas eo eſt reducta, vt ex curua FEG data altera CBD, in qua elementa angulorum BMP ſint reſpondentibus applicatis PF proportionales conſtruatur; Et vt curua CBD euadat traiectoria reciproca, curua FEG debet habere diametrum, et circa eam ramos ſimiles et aequales, cuiusmodi eſt FEG.

Cur-

Curua MBN ex ea conſtructa erit traiectoria reciproca, cuius axis eſt EB, diameter prioris curuae.

VI. Sit AP$=x$. PM$=y$ PF$=u$. Erit augulus RMm, vt $ddy:(dz^2+dy^2)$. Ergo $u=ddy:(dx^2+dy^2)$ poſito dx conſtante, ex qua aequatione datis u et x inueniri debet, y. Ponatur $dy=pdx$. erit $ddy=dpdx$. ergo $u=\frac{dp}{dx+ppdx}$ et $udx=\frac{dp}{1+pp}$. Ex qua aequatione, ob u et x datas, p inuenitur, indeque y; eſt autem $\frac{dp}{1+pp}$ duplum elementum ſectoris circularis, cuius radius eſt, 1. et tangens p; erit ergo $\frac{1}{2}\int udx=$ ſectori iſti circulari. Eſt vero $\int udx=$areae APEF, demta vel addita conſtante inuenitur ergo per quadraturas, p, indeque rurſus per quadraturas y ſequenti modo.

VII. Sit data quaecunque curua IEK diametro EA praedita; ſuper recta AO diametrum EA normaliter ſecante, accipiatur punctum quoduis O, quo centro et radio arbitrario OD deſcribatur circulus DGH, et ex D ducatur tangens DQ. Ducta quacunque applicata PF, ſpatio PFID aequalis ſumatur ſector DOG, et producatur DG in Q. ex Q ducatur ipſi DA parallela QN, occurrens applicatae FP productae in N; Erit punctum N in curua DN tali, vt ſit PN$=p$, ſi ſit AP$=x$. Hic dimidium, quod ſuperiore §. inuentum eſt, negligitur, cum enim $ddy:(dx^2+dy^2)$ ſaltem proportionetur ipſi u, etiam $\int udx$, tantum proportionalis aſſumi poteſt, ſectori DOG. vnde nihil intereſt ſiue dimidius ſector ſiue totus ſumatur, et dein ſiue $\int udx$ ab applicata DI, ſiue ab AF computetur. *Fig. II.*

VIII. Inuenta curua DN facili negotio habetur curua DM traiectoria reciproca, cum enim ſit $dy=pdx$ accipiatur vbique PM proportionalis areae DPN, erit punctum M, in traiectoria reciproca, cuius axis eſt AB, diameter curuae IEK aſſumtae. Apparet hic ſimul, infinitas, ex vnica aſſumta IEK, traiectorias reciprocas inueniri poſſe, prout enim transuerſalis DA aliter ducitur, punctaque O et D aliter aſſumuntur, ita aliae reſultant traiectoriae reciprocae. Dein etiam pro varia ratione, quae ponitur inter PM ſpatium DPN, traiectoriae variae formantur. Vnde patet data vna traiectoria reciproca, applicatas in eadem ratione augendo vel diminuendo, infinitas inueniri alias traiectorias reciprocas.

IX. Si ſpatium DPFI aequale accipiatur quadranti ODH, tangens DQ ipſique aequalis applicata PN euadit infinita, eritque tum PN aſymtotos curuae DN; Sin ſpatium illud maius fuerit quadrante, applicata PN erit negatiua. Traiectoriae autem DM applicata PM euadet, vbi PN eſt infinita, tangens curuae. Et deinde abeunte PN in negatiuam applicata PM decreſcet, quare curua DM habebit in M punctum reuerſionis. Si ſpatium DPN, exiſtente PN aſymtoto, eſt infinitum, applicata PM quoque erit infinita, adeoque aſymtotos etiam curuae DM.

X. Sit exempli gr. $u=\frac{aab}{xx+aa}$ et hinc eruatur aequatio inter x et y cum ſit u, vt $ddy:(dx^2+dy^2)$ erit $bdx^2+bdy^2=aaddy+xxddy$ ponatur $dy=pdx$ erit $ddy=$

dpdx

$dpdx$, quibus valoribus ſubſtitutis habetur $bdx + bppdx = aadp + xxdp$. Ergo $\frac{bdx}{aa+xx} = \frac{dp}{1+pp}$ cuius aequationis vtriusque membri integratio a circuli quadratura dependet. Huc autem aequatio ea reducetur $\frac{b}{a}\left(\frac{dx}{a+x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{a-x\sqrt{-1}}\right) = \frac{dp}{1+p\sqrt{-1}} + \frac{dp}{1-p\sqrt{-1}}$. Quae integrata abit in hanc $bl(a+x\sqrt{-1}) - b(la - x\sqrt{-1}) = al(1+p\sqrt{-1}) - al(1-p\sqrt{-1}) + alb$ erit ergo $\left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}\right)^{\frac{b}{a}} = \frac{b+bp\sqrt{-1}}{1-p\sqrt{-1}} = \frac{bdx+bdy\sqrt{-1}}{dx-dy\sqrt{-1}}$. Sit $b=a$, et $b=\sqrt{-1}$ erit $\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}} = \frac{dx\sqrt{-1}-dy}{dx-dy\sqrt{-1}}$ quae reducta dat $dy = \frac{x-a}{x+a}dx$. Si ſit $b=2a$ manente $b=\sqrt{-1}$ erit $dy = \frac{2ax+xx-aa}{2ax-xx+aa}dx$. Et ita porro; ſed huiusmodi exemplis non immoror, fuſius de iis infra agetur.

XI. Quum curuae genitricis IEK diameter EA ſit axis traiectoriae inde genitae, manifeſtum eſt, ſi illa curva plures vna diametros habuerit, traiectoriam inde ortam plures axes etiam habituram, ſi ergo loco curuae IEK curua infinitarum diametrorum adhibetur, traiectoria infinitos etiam axes habebit. Quando autem traiectoria deſideratur, quae axium datum habeat numerum, id aliter interpretandum eſt. Vt enim omnis curua vna plures diametros habens neceſſario infinitas habet, ita etiam traiectoria reciproca, quae vno plures, infinitos neceſſario axes habebit. Sed quia traiectoria infinitorum axium infinita habere debet puncta reverſionis, datus axium numerus ad vnam tantum curuae portionem intra duo puncta flexus proxima comprehenſam referendus

dus eſt. Deſideratur enim curua omni irregularitate, cuiusmodi eſt flexura et reflexio, deſtituta.

Fig. III. XII. Sit curua IEK*ek* infinitis praedita diametris, EA, KL, *ea*, *kl*. et abſcindatur area DBTI = quadranti ODH, linea TB producta aſymtotos erit curuae DNV, et tanget traiectoriam in C, vbi eſt punctum reflexionis. Portio ergo traiectoriae DMC, talis erit, de qua eſt quaeſtio numeri axium dati. Haec vero portio tot habebit axes, quot diametri fuerint in ſpatio DBTI. Quo circa in arbitrio noſtro poſitum erit numerum axium definire hoc modo: Propoſito numero axium abſcindatur ſpatium DBTI eundem diametrorum numerum comprehendens, tum deſcribatur circulus ODG tantus vt eius quadrans ODH adaequet abſciſſum ſpatium DBTI manifeſtum eſt, hoc modo generari curuam deſideratam.

XIII. Si loco curuae IEK*ek* adhibeatur linea recta ipſi DB parallela, quaelibet applicata FP erit diameter, ergo et traiectoriae DMC quaeuis applicata erit axis. Atque haec eſt illa curua de qua Cel. Bernoullius ſub pantogoniae nomine, fuſius in Actis Erud. 1726 egit. Aequatio eius naturam exprimens, erit $1 = addy:(dx^2 + dy^2)$ ſeu $dx^2 + dy^2 = addy$ cuius haec eſt proprietas, vt, radiis ſecundum axium directionem incidentibus, radii reflexi omnes ſint inter ſe aequales. Facilius autem curua haec ſic conſtruetur, vt accipiatur $x = \int \frac{aadp}{aa + pp}$ et $y = \int \frac{apdp}{aa + pp}$.

XIV. Methodum hanc inueniendi traiectorias reciprocas per duplicem quadraturam, non eo fine attuli

vt

vt inde traiectoriae reciprocae eruantur , id quod vix praeſtari poſſet, ſi ſimplices vel algebraicae deſiderentur, ſed vt inde adipiſcar ſolutionem problematis de inueniendis traiectoriis reciprocis pluribus vno axibus gaudentibus, quod Anonymus Anglus Cel. Ioh. Bernoullio propoſuit. At nunc ad alium pergo modum perquam foecundum in exhibendis traiectoriis ſimplicioribus, et praecipue algebraicis. Perſequar autem hic illum tantum problematis caſum, quo angulus interſectionis ponitur rectus ; cum facillime reliqui caſus omnes ad hunc reducantur.

XV. Sit CBD traiectoria orthogonalis, cuius axis ſit AB quem ad angulos rectos ſecet recta PQ; Ducantur duae applicatae PM, QN, axi AB parallelae, vtrinque aeque diſtantes ab eodem, illisque proximae, pm qn, nec non baſi PQ parallelae MR, NS. Erunt triangula MRm, nSN, ſimilia, ob SnN+RmM=recto. Sint AP$=x$ PM$=y$, erunt P$p=$MR$=dx$, R$m=dy$ nec non AQ$=-x$, Q$q=$NS$=-dx$; ſit QN$=z$, ſeu S$n=dz$. Ex ſimilitudine triangulorum MRm,nSN deducetur MR (dx) : R$m(dy)=$S$n(dz)$: SN$(-dx)$ vnde erit $dydz=-dx^2$. Ex qua aequatione inueniri debet y. Etenim z ab y dependet, quia in expreſſione ipſius y, poſito loco x,$-x$, habetur z. *Fig. IV.*

XVI. Ponatur $dy=pdx$, eſt autem p functio ipſius x. Abeat ea, poſito $-x$, loco x in q,erit $dz=-qdx$ et conſequenter erit $pq=1$. Vnde patet, loco p talem ſumi debere ipſius x functionem, ex qua factum in eandem, ſed loco x poſito $-x$ adaequet vnitatem. Totum

ergo huius ſolutionis artificium huc redit, vt idoneae eligantur functiones ipſius, x loco p ſubſtituendae. Ad hoc autem, niſi fortunae earum inuentionem committere velimus, accuratior functionum requiritur cognitio. Cuius, vt quaſi prima elementa iaciam, ſequenti modo eas diſcernere commodum viſum eſt.

XVII. Primo loco notandae ſunt functiones, quas pares appello, quarum haec eſt proprietas, vt immutatae maneant, etſi loco x, ponatur $-x$. Huiusmodi ſunt omnes potentiae ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri pares, aut fractiones, quarum numeratores ſunt numeri pares, denominatores vero impares: Dein quaecunque functiones ex huiusmodi potentiis vel additione vel ſubtractione, vel multiplicatione vel diuiſione, vel denique ad potentiam quamcunque elevatione componuntur, ſunt itidem pares ut $x^{\frac{4}{5}}, (ax^2 + bx^{\frac{2}{3}})^n$

XVIII. Secundo functiones impares obſeruo, quae prorſus ſui negatiuas producunt, ſi x, abit in $-x$. Cuiusmodi ſunt x ipſum, x^3, x^5 etc. omnes potentiae, quarum exponentes ſunt numeri impares, vel fractiones, quarum numeratores et denominatores ſunt numeri impares, nec non functiones, quae harum potentiarum additione vel ſubtractione, etiam eleuatione ad exponentis imparis dignitatem componuntur, vt, $x^{\frac{3}{5}}, (ax^3 + bx^{\frac{5}{7}})^3$

XIX. Si functio impar per imparem multiplicatur, factum ſemper erit functio par, ut x^3 in $x^{\frac{1}{3}}$, dat $x^{\frac{10}{3}}$ At functio par in imparem ducta ſemper quidem imparem

rem producit, interdum tamen ea ſimul pro pari haberi poteſt, vt $x\sqrt{(aa+xx)}$ eſt functio ſimul par et impar, quippe eadem cum $\sqrt{(aaxx+x^4)}$, quae eſt par. Quod autem de elevatione functionis paris ad dignitatem quamuis ſupra dictum eſt, quod potentia ſit quoque par, ſi exponens ſit fractio, cuius denominator numerus par, v. g. $\frac{1}{2}$, reſtrictio adhibenda eſt, niſi radix re ipſa extrahi queat, vt $(\frac{aa}{xx}+2a+xx)^{\frac{1}{2}}$ non eſt functio par, conuenit enim cum $\frac{a}{x}+x$. De huiusmodi autem functionibus iudicium facile patet.

XX. Praeterea obſeruatu dignae ſunt functiones reciprocae, quae mihi ſunt functiones poſito in iis $-x$, loco x, abeuntes in tales, quae in illas ductae producunt vnitatem, vt $(\frac{a+x}{a-x})^n$, quae, poſito x negatiuo, abit in hanc $(\frac{a-x}{a+x})^n$, cuius in illam factum eſt $=1$. Huc referendae quoque ſunt exponentiales a^x, $(aa+xx)^{x^3}$ etc. omnes nempe functiones pares eleuatae ad functiones impares.

XXI. Hiſce de functionibus praemiſſis manifeſtum eſt, p eſſe functionem ipſius x reciprocam, cum ſit $pq=1$. Quemadmodum autem huiusmodi functiones reciprocae inueniendae ſint, breui oſtendere conabor; Sed primo de functionibus exponentialibus nihil intermiſcere conſtitui, cum ante omnia traiectorias reciprocas algebraicas eruere animus ſit. Poſtmodum autem de exponentialibus quaedam ſubiungam.

XXII. Vt autem rem generalius abſoluam, aſſu-

mo tertiam variabilem t, et inueſtigabo, quomodo x et y in t, determinari debeant, vt traiectoria reciproca reſultet, pono itaque $dx=rdt$, et $dy=pdt$. Efficiendum ergo eſt, vt poſito t negatiuo, et dx in negatiuum abeat. Quare loco r ponatur oportet functio ipſius t par, quae ſit N; erit $dx=Ndt$, et abeunte t in negatiuum, erit $dx=-Ndt$. Conſequenter ob $d\,dz=-dx^2$, poſito in caſu $-t$, loco p, q, vt ante, habebitur $pq=NN$.

XXIII. Ponatur $p=(P+Q)^n$ denotante P functione pare et Q impare ipſius t, erit $q=(P-Q)^n$ adeoque $(PP-QQ)^n=N^2$; ergo $PP=N^{\frac{2}{n}}+QQ$, et $P=\surd(N^{\frac{2}{n}}+QQ)$ erit ergo $p=(Q+\surd(N^{\frac{2}{n}}+QQ))^n$. Nihil contradictorii hic latet in aequatione $P=\surd(N^{\frac{2}{n}}+QQ)$ etenim P, quae functio par eſſe debet, talis etiam in aequatione exhibetur. At ſi Q erueretur, inueniretur $Q=\surd(N^{\frac{2}{n}}-PP)$ id quod contradictionem inuoluit; nam Q, quae functionem imparem denotat, aequatur hic functioni pari. Vt fractiones in exponentibus euitem, ſcribo loco N., N^n et erit $dx=N^n dt$, et $dy=dt\,(Q+\surd(N^2+Q^2))^n$ poteſt hic loco Q, ſcribi NQ, (§.19) et dein loco N^n, vt ante, N; habebitur $dx=Ndt$, et $dy=Ndt(Q+\surd(1+QQ))^n$.

XXIV. Vt nouae formulae reſultent, tollo irrationalitatem, ponendo $\surd(N^2+Q^2)=N+RQ$, erit $Q=\frac{2NR}{1-RR}$ vnde R functio impar ſit ipſius t neceſſe eſt, ob Q imparem, erit ergo $Q+\surd(N^2+Q^2)=\frac{N.(1+R)}{1-R}=$(ſcripto loco R,

coR, $\frac{Q}{P})\frac{N.(P+Q)}{P-Q}$. Denotabunt ſemper P pares et Q impares functiones ipſius t. Erit ergo $dx = N^n dt$, et $dy = dt \left(\frac{NP+NQ}{P-Q}\right)^n$; altera formula eodem modo tractata dat, $dx = N dt$, et $dy = N dt \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n$. Huiusmodi formulae generales infinitae poſſunt inueniri, alias aequationes loco $p = (P+Q)^n$ aſſumendo: cuiusmodi eſt haec formula $dx = N dt$, et $dy = N dt\ (P+Q)^{mn}$. $\left(S+\sqrt{SS+(PP-QQ)^{\frac{-m}{k}}}\right)^{nk}$ denotante S functione impare, ſed duabus formulis inuentis tanquam ſimpliciſſimis et foecundiſſimis in productione traiectoriarum algebraicarum contentus ero, quarum altera irrationalitate eſt affecta, altera vero rationalis.

XXV. Accipio formulam priorem, caſus quibus dy integrabile redditur, euoluturus. Sit primo $N = 1$ erit $dx = dt$ unde $dy = dx\ (Q+\sqrt{1+QQ})^n$. Pono porro $Q = x$ erit $dy = dx\ (x+\sqrt{1+xx})^n$ cuius integrale obſeruo generaliter haberi poſſe; ponatur $x+\sqrt{(1+xx)} = u$, erit $x = \frac{uu-1}{2u}$, conſequenter $dy = \frac{u^n du}{2} + \frac{u^{n-2} du}{2}$ et hinc $2y = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n-1}}{n-1} = \frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n-1}}{n-1}$ habetur ergo hic aequatio algebraica generalis infinitas curuas ſuppeditans, numeros rationales loco n ſubſtituendo.

XXVI. Antequam autem ad deriuationem aequationum determinatarum ex generali pergam; quaedam ex aequatione differentiali deducenda ſunt, quae ex inte-

 grata

grata difficilius eruerentur. Primo palam eſt, ſi ſit $n=0$ traiectoriam tum eſſe lineam rectam, cum axe angulum ſemirectum conſtituentem, propter $dy=dx$. Dein, ſi fuerit $n=1$ erit $dy=xdx+dx\sqrt{(1+xx)}$; vnde patet, hanc aequationem eſſe ad traiectoriam reciprocam, quae methodo Bernoulliana ope rectificationis parabolae conſtruitur, quo vnico caſu non abſolute eſt integrabilis.

XXVII. Tertio, etſi loco n ponatur $-n$, aequationem nihilominus ad eandem fore curuam, abſciſſis ſaltem ex axis altera parte ſumtis, ſeu exiſtentibus negatiuis. Conueniunt enim duae hae expreſſiones $(-x+\sqrt{1+xx})^n$ et $(x+\sqrt{1+xx})^{-n}$, vt cuivis examinanti facile patebit. Nihil ergo in poſterum lucraturus eſſem, loco n valores negatiuos ſubſtituendo. Quare ſubſtitutione numerorum affirmatiuorum tantum vtar, cum ii ſoli ſufficiant ad vniuerſalem aequationem exhauriendam.

XXVIII. Excuſſi iam ſunt caſus, vbi $n=0$, et $n=1$ progredior vlterius, ſed integralem aequationem in vſum vocando, et pono $n=2$. Erit $3y=2x^3+3x+\overline{2+2xx}\sqrt{1+xx}$, quae ad rationalitatem reducta huc redit $12yx^3+18xy-9yy+3xx+4=0$. Et haec aequatio quatuor dimenſionum, ſine dubio ſimpliciſſima eſt, poſt illam paraboloidem tertii ordinis: ſatisfacit adeo quaeſtioni, quam Cel. Bernoullius Anonymo Anglo propoſuit, et ego repetii in Act. Erud. 1726. de inuenienda traiectoria algebraica, eam tertii ordinis, in ſimplicitatis ordine proxime excipiente.

XXIX. Si ponatur $n=3$ prodibit aequatio pro

linea

linea 5 ordinis haec $128yx^4+192yx^2+48y-64yy-8xx-9=0$. Sit $n=4$ reſultabit aequatio 6 ordinis, et hinc legitima inductione inferri poteſt, aequationem generalem ad rationalitatem reductam eſſe ſemper ordinis $n+2$. Id quod etiam in valoribus fractis loco n ſubrogatis obtinet. Si ſit $n=\frac{1}{2}$ aequatio erit ordinis $\frac{5}{2}$. Quae autem, cum adhuc ſit irrationalis, reducta erit ordinis quinti, et generaliter ſi fuerit $n=\frac{p}{q}$ aequatio reducta aſcendet ad $p+2q$ ordinem.

XXX. Patet ergo aequationem generalem loco n alios atque alios valores ſubſtituendo, ex quolibet curuarum ordine, ſi excipias ſecundum et tertium, vnam ad minimum traiectoriam reciprocam exhibere. Et dato ordine curuarum, quot ex eo ope huius aequationis inueniri poſſint traiectoriae, facile determinare erit, nempe diſpiciendum eſt, quoties $p+2q$ numerum dati ordinis producere queat, ſed loco p et q numeri ſaltem affirmatiui et integri ſubſtitui poſſunt, et eiusmodi inſuper vt $p:q$ ad minores terminos reduci nequeat. Sed de hac formula generali fuſius in Act. Lipſ. 1727. actum eſt a me, ideoque hic ad alia me conuerto.

XXXI. Adhaereo adhuc aequationi §. XXV. ad hanc reductae $dy=dx\,(Q+V(QQ+1))^n$. Circa quam obſeruaui, nullis eam ſubſtitutionibus potentiarum rationalium, quales ſunt x^3, x^5 etc. nec non x^{-1}, x^{-3} etc. loco Q factis, generaliter integrabilem reddi, quanquam vtique paſſim reperiantur caſus particulares integrabiles, quos autem perſequi inſtitutum minime permittit. At ſubſtituendo loco Q potentias ipſius x irrationales, ſed legit.

gitimas nempe functiones impares, quales ſunt $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{1}{7}}$ et vbi numerator exponentis eſt vnitas, ſemper formulam integrabilem reddi obſeruaui.

XXXII. Sit itaque $Q = x^{\frac{1}{3}}$, erit $dy = dx\,(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{2:3} + 1})^n$. Quae vt integretur, pono $x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1} = t$, erit $x^{\frac{1}{3}} = \frac{tt-1}{2t}$ unde $x = \frac{t^3}{8} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8t} - \frac{1}{8ttt}$ adeoque $dx = \frac{3ttdt}{8} - \frac{3dt}{8} - \frac{3dt}{8tt} + \frac{3dt}{8t^4}$: ergo $dy = \frac{3t^{n+2}dt}{8} - \frac{3t^n dt}{8} - \frac{3t^{n-2}dt}{8} + \frac{3t^{n-4}dt}{8}$. Conſequenter $\frac{8y}{3} = \frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n-1}}{n-1} + \frac{t^{n-3}}{n-3} = \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n+3}}{n+3} - \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n+1}}{n+1} - \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n-1}}{n-1} + \frac{(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1})^{n-3}}{n-3}$.

XXXIII. Sunt autem quidam caſus, quibus integratio a logarithmis dependet, nempe ſi fuerit $n = 1$ vel 3. Ceterae ſubſtitutiones omnes loco n factae ſuppeditant curuas algebraicas, idque vt ſuperior ſecundum certam legem. Quod de ſuperiori formula enunciatum eſt, valores ipſius n, negatiuos ſuperfluos eſſe; idem etiam de hac, nec non de generaliſſima tenendum eſt. Quemadmodum et ſemper obtinet, ſi fiat, $n = o$, tum traiectoriam degenerare in lineam rectam.

XXXIV. Caſus huius aequationis ſimpliciſſimus ſine dubio erit, quo $n = 2$. In eoque poſito breuitatis ergo

ergo loco $x^{\frac{1}{3}}t$, reperietur $5y = 6t^5 + 5t^3 + (6t^4 + 2tt - 4)\sqrt{(1+tt)}$. Conſequenter ad rationalitatem reducendo peruenietur ad hanc aequationem, $60t^5y + 50t^3y - 25y^2 - 60t^4 - 45t^6 + 16 = 0$. Atque haec tandem, ſubſtituto $x^{\frac{1}{3}}$ loco t, abibit in aequationem 8. ordinis. Si ponatur $n=4$ aequationem ad 10 dimenſiones aſſurrecturam, facile praeuidere potui. Et aequationem generalem ad ordinem linearum $n+6$ eſſe referendam. Vt adeo et haec formula, ex quolibet curuarum ordine ad minimum vnam, ſi excipiantur 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 9, traiectoriam exhibeat.

XXXV. Haec eadem formula, vt et reliquae, quae ex ſubſtitutionibus §. XXXI determinatis deducuntur, alia via ex altera aequationis generalis forma deriuantur. Et qnam ideo paucis hic complectar, quod inſuper ex ea plures formulae algebraicae generales, aliunde altioris indaginis, fluant. Aequatio generalis haec eſt, $dx = Ndt$, $dy = Ndt\,(Q + \sqrt{(QQ+1)})^n$. In qua ſi fiat $Q = x$, et ſucceſſiue $N =$ vel 1 vel xx, vel x^4 etc. nec non vel $a + bxx$, $axx + bx^4$ et eiusmodi compoſitae functiones pares ipſius x ſubrogentur, aequatio generalis ſemper erit integrabilis et algebraicarum aequationum ſummopere foecunda.

XXXVI. Expoſito modo, quo ad aequationes algebraicas generales peruen tur, examinandi ſunt alii caſus, quibus quidem aequatio generalis non integrabilis

redditur, nihilo tamen minus infinitis modis facilibus determinatu, algebraicas exhibere poteſt aequationes. Aſſumo hanc formulam $dx = N^n dt$ et $dy = dt (Q + \sqrt{(QQ + NN)})^n$, fiat $N = tt$ et $Q = t$ erit $dx = t^{2n} dt$ et $x = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $dy = dt (t + t\sqrt{(1 + tt)})^n$. Vnde patet hanc aequationem ſemper eſſe integrabilem ſi fuerit n numerus integer impar; id quod facile videre eſt, ſi reipſa ad dignitatem eleuetur.

XXXVII. Sunt autem inſuper alii caſus, quibus formula noſtra integrabilis redditur, quos ſic inuenio ponatur $t + t\sqrt{(tt + 1)} = utt$, erit $t = \frac{2u}{uu - 1}$, ideoque, $dt = -\frac{2uudu - 2du}{(uu-1)^2}$; conſequenter $dy = -\frac{2^{2n+1} u^{3n} du (uu + 1)}{(uu-1)^{2n+2}}$ vnde patet ſi fuerit n numerus negatiuus par, fore aequationem integrabilem, id quod patebit, ſi $(uu - 1)^{-2n-2}$ ipſo facto eleuetur. Plures caſus elicientur, ſi fiat $t + \sqrt{(tt + 1)} = ut$; et obtinebitur $dy = du (u^{\frac{3n+1}{2}} - u^{\frac{3n-1}{2}}) (u - 2)^{\frac{n-1}{2}}$; quae erit integrabilis, primo ſi ſit n quilibet numerus impar: dein ſi $\frac{3m+1}{2}$ fuerit numerus integer. Fiat ergo $\frac{3n+1}{2} = m$; erit $n = \frac{2n-1}{3}$ adeoque loco n poni poteſt fractio cuius denominator $= 3$ et numerator numerus impar.

XXXVIII. Vnicum exemplum attuliſſe ſufficiat, ſit $n = 1$. erit $dx = ttdt$, et $t = \sqrt[3]{3x}$; deinde $dy = tdt + tdt\sqrt{(1 + tt)}$: ergo $y = \frac{tt}{2} + \frac{(1 + tt)\sqrt{(1 + tt)}}{3}$ vnde elicitur haec

haec aequatio ordinis ſexti $(12yy-12xx)^3)=3456y^5$ $+12528x^2y^3-432yx^4-2304y^4-288x^2y^2+81x^4$ $+512y^3$. Poſſunt itaque infinitae aequationes algebraicae etiam ex hac aequatione $dy=dt(t+t\sqrt{(1+tt)})^n$ erui, et ſimili modo ex aliis formis, loco N vel Q; alios valores ſubſtituendo, caſus, quibus hoc contingit, non ſuperiori abſimili modo detegentur.

XXXIX. Quae de priori duarum generalium formularum, irrationali hucusque tradita ſunt, vſum eius et foecunditatem ſatis ſuperque commonſtrant. Progredior nunc ad alteram formulam rationalem quae eſt, dx $=N^n dt$ et $dy=dt\left(\frac{N.(P+Q)}{P-Q}\right)^n$ ſeu quod eodem redit, $dy=dt\left(\frac{N.(1+Q)}{1-Q}\right)^n$. Non immoror hic deriuandis hinc curuis tranſcendentalibus nempe logarithmicae ſemirectangulae, ſi $Q=t$, $N=1$. et $n=1$. aut cycloidi; ſi $n=\frac{1}{2}$. quippe quae ab aliis iam fuſius pertractatae ſunt, propoſitum mihi eſt, vt in priori, quas ea ſub ſe comprehendit curuas algebraicas, perſequi, et regulas, quibus algebraicae inueniri queant, eruere.

XL. Ne autem fractio in cauſa ſit, cur difficilius caſus algebraici dignoſcantur, eam tollo loco N. ponendo $N(1-QQ)$ Debet enim N eſſe functio par, ipſius t Habebitur $dx=dt(N\text{-}NQQ)^n$ et $dy=dt(N(1+Q)^2)^n$ ſeu $dx=N^n dt(1-QQ)^n$ et $dy=N^n dt(1+Q)^{2n}$. Vt hinc aequatio algebraica deriuari queat, oportet vt et dx et dy integrabile fiat. Ponatur $N=1$; erit $dx=dt(1-QQ)^n$ et $dy=dt(1+Q)^{2n}$; ſit $Q=t$ erit $dx=dt(1-tt)^n$ et $dy=dt(1+t)^{2n}$ vnde $y=\frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1}$; ergo $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y}$

$-1 = t$. Vt igitur dx integrari queat, patet loco n ſubſtitui debere numerum integrum affirmatium.

XLI. Cum n ſit numerus integer affirmatiuus, conſtituet $(1-tt)^n$, ſi in ſeriem conuertatur, progreſſionem numeri terminorum finiti, hanc $1 - \frac{n}{1} tt + \frac{n.n-1}{1.2} t^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} t^6$ etc. Vnde obtinebitur $x = t - \frac{n.t^3}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2} \frac{t^5}{5} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \frac{t^7}{7}$ etc. in qua ſi loco t ſubſtituatur valor inuentus $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y-1}$ habebitur aequatio inter y et x adeoque pro curua quaeſita.

XLII. Sit $n = 1$ erit $x = t - \frac{1}{3}t^3 = \sqrt[3]{3y-1} - \frac{1}{3}(\sqrt[3]{y-1})^3 = \sqrt[3]{9yy} - y - \frac{2}{3}$; ergo $(x+y+\frac{2}{3})^3 = 9yy$. Quae aequatio euadit tertii ordinis, et exprimit parabolam cubicalem ſemirectangulam, quae pro ſimpliciſſima omnium traiectoriarum reciprocarum algebraicarum habetur. De qua Cel. Ioh Bernoullius in Act. Erud. 1725. peculiari ſchediasmate egit. Sunt autem reliquae ſubſtitutiones loco n factae minus felices in exhibendis curuis ſimplicibus, poſito enim $n = 2$, aequatio iam vltra trigeſimum gradum aſſurgit.

XLIII. Poſſunt loco Q aliae functiones ipſius t ſubſtitui, vt t^3, t^5 aut $t^{\frac{1}{3}}$ etc. quae omnes formulam infinitis modis integrabilem reddent, ſemper nimirum quando n fuerit numerus affirmatiuus integer. Simili modo res ſe habet ſi alii loco N valores ſubrogentur. Sit nimirum $N = tt$ erit $dx = t^{2n} dt (1-QQ)^n$ et $dy = t^{2n} dt (1+Q)^{2n}$. Ponatur $Q = t$. erit $t^{2n} dt (1-tt)^n$ et $dy = t^{2n} dt$

(1+

$(1+t)^{2n}$. Vnde patet et x et y haberi poſſe modo ſit $2n$ numerus integer. Si enim fuerit numerus par, facile patet omnia eſſe in ſimplices terminos reſolubilia, ſi $2n$ fuerit numerus impar erit $(1-tt)^n$ irrationale, ſed licet $2n$ ſit numerus impar, nihilominus $t^{2n}dt\ (1-tt)^n$ erit integrabile.

XLIV. Sit $2n=1$ erit $dx=tdt\sqrt{(1-tt)}$ et $dy=tdt+ttdt$. Quare $x=-\frac{1}{3}(1-tt)^{\frac{3}{2}}$ et $y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$. Erit igitur $t=\sqrt{(1-\sqrt[3]{9xx})}$ ponatur $y+\frac{1}{8}=x$ habebitur reductione per acta, haec aequatio ſexti gradus $(12uu+24xx)^3=6912u^5-7344u^3xx-11232ux^4-9216u^4+7488uuxx+10125x^4+4096u^3$. Alii loco n, numeri ſubſtituti alias exhibebunt curuas algebraicas, deinde innumerabiles aliae loco Q et loco N ſubſtitutiones fieri poſſunt, quae ſemper, ſi n eſt numerus affirmatiuus integer, algebraicas efficient aequationes. Et haec praecipua ſunt, quae de Algebraicis curuis afferri poſſunt.

XLV. Hiſce coronidis loco ſubiungo alias formulas generales, quae reſultant, ſi loco (vid. §. XXII.) p et q functiones exponentiales ſubrogantur. Habentur autem in exponentialibus et functiones pares et reciprocae, vt P^R eſt functio par, ſi ſint et P et R functiones pares, at ſi fuerit R functio impar; erit ea functio reciproca, priori in caſu abeunte x in $-x$ manet P^R, in poſteriori mutatur in P^{-R}.

XLVI. Quibus ergo in locis, antea functiones pares ſubſtituere opus fuerat, poterunt huiusmodi ex-

ponentiales adhiberi, et loco functionum imparium ſimiles exponentiales ductae in functionem imparem quandam vt $P^R Q$, exiſtentibus P et R paribus functionibus et Q impari.

XLVII. Cum functiones reciprocae ita ſint comparatae, vt factum earum in ſe ipſas, ſed loco x poſito $-x$, aequetur vnitati, patet, quicquid ſit p, ſemper ei inſuper eiusmodi functionem reciprocam multiplicatione adiungi poſſe, nempe vbi fuerat $dy = pdt$ poteſt etiam ſumi $dy = T^V pdt$. denotante T functione pari et V impari. Nihilominus enim factum ex dy in ſe, ſed abeunte t in $-t$, idem erit ac ante.

XLVIII. Formulis ergo generalibus §§. XXIII. XXIV. inuentis adiungi poterit functio reciproca, immutato earum vſu. Et habebitur $dx = Ndt$ et $dy = T^V Ndt(Q + \sqrt{(1+QQ)})^n$ deinde loco formulae rationalis habebitur $dx = Ndt$ et $dy = T^V Ndt(\frac{P+Q}{P+Q})^n$. Atque his formulis in ampliſſimos curuarum exponentialium, quae problemati traiectoriarum reciprocarum ſatisfaciunt, campos deducimur.

XLIX. Exemplum nobis ſit, hypotheſis, qua, $n = 0$, $N = 1$, $T = a$, et $V = t = x$; erit $dy = a^t dt = a^x dx$ quae eſt aequatio ad logarithmicam ordinariam, quae ſatisfaciet applicatam ſubtangenti aequalem pro axe conuerſionis aſſumendo. Pluribus exemplis, quippe curuas ignotas exhibentibus, haec perſequi minime conſultum duco.

L. Hiſce tandem, quae hactenus attuli, quaeſtioni exaſſe me ſatisfeciſſe non dubito, quaecunque enim

ad

ad enodationem huiusmodi quaeſtionum iure requiri poſſunt, abunde hic exhibuiſſe mihi videor. Dedi enim primo generaliſſimas aequationes applicatu faciles: ſecundo methodum dedi infinitas aequationes vniuerſales algebraicas inueniendi, ex quibus ſimpliciſſimas reipſa deduxi.

Tandem, quae ex tranſcendentalibus curuis cognitae ſunt, etiam ex aequationibus generalibus facile deriuantur. Hiſce omnibus praemiſi ſolutionem duorum problematum agnatorum, de Pantogonia infinitorum axium traiectoria et de traiectoriis datum axium numerum habentibus, quippe quae ex conſideratione naturae traiectoriarum reciprocarum ſponte fluunt.

Theoria Noua DE MOTV AQVARVM PER CANALES QVOSCVNQVE FLVENTIVM

Auctore

Daniele Bernoulli, Ioh. Fil.

MOtum aquarum per tubos determinare aggreſſi ſunt multi Geometrae iique celeberrimi; ſed pauci aliquid dederunt, quod experientiae eſſet conforme, nemo autem integram theoriam ſtabiliuit. Aquam in tubo ſtagnantem per *M. Iun.* 1727.

per foramen valde paruum ea exilire velocitate, qua poſſit aſcendere ad altitudinem ſuperficiei aqueae ſupra foramen, a Mathematicis quibusdam recte fuit definitum; qui vlterius progredi voluerunt, nihil praeter coniecturas omni experientiae repugnantes protulerunt. Ego vero poſtquam ſaepius intellexiſſem ex Patre ſummum viſum, quem habeat principium conſeruationis virium viuarum pro infinitis problematis Phyſico-Mathematicis ſoluendis, quae alias pro valde difficilibus, ne dicam deſperatis, habenda eſſent, mentem ſubiit, num non idem principium pro eruenda theoria aquarum fluentium per tubos tantopere deſiderata inſeruire poſſit, neque euentus ſpem meam fefellit. Verum vt iam paulo propius ad rem ipſam accedam, dicam ante omnia, quid per vires viuas earumque perpetuam conſeruationem intelligendum ſit; Dicitur itaque vis viua, quae ineſt corpori moto atque menſuratur ex producto velocitatis quadrati in corporis maſſam: ſi plura corpora moueantur, vis totalis ſeu quantitas virium erit aeſtimanda ex aggregato omnium productorum modo definitorum. Demonſtrauit autem Hugenius poſt eumque multi alii eſſe hoc aggregatum conſtans quomodocunque ſe inuicem percutiant ipſa corpora, modo ſint perfecte elaſtica atque in vacuo mota concipiantur. Conſeruantur ergo etiam vires viuae in corporibus elaſticis. Pono autem corpuſcula minima fluidum aliquod componentia eſſe perfecte elaſtica; niſi enim eſſent duriſſima ſummaque elaſticitate proinde praedita, poſſent vlterius ſubdiuidi. Hiſce praemonitis manifeſtum factum eſt, quid fieri debeat, quan-

quando aqua fluit horizontaliter per tubum non cylindricum, ſed v. gr. conicum; nempe cum omnis aqua motum ſuum in linea recta continuare nequeat, particulae ipſius impingunt in latera tubi, et inde reflectunt, rurſusque alias fluidi partes percutiunt; interim durante hac agitatione eadem quantitas virium perpetuo conſeruabitur hacque lege motum ſuum in tubo continuabit aqua. Notandum tamen probe eſt, praedictos motus omnes eſſe minimos, ita vt nulla particula locum ſuum mutet, niſi quatenus cum tota fluidi maſſa motum habet progresſiuum; haud ſecus, ac videmus multis globis elaſticis in linea recta iuxta ſe diſpoſitis et aequalibus, quorum extremus ſi percutiatur, non totam globorum ſeriem, ſed ſolum extremum oppoſitum moueri. Et hac ratione haud difficulter quisque videt, poſſe quoque in motu fluidorum eandem quantitatem virium perpetuo conſeruari, omnino ſicut in motu corporum elaſticorum ſe inuicem percutientium; imo neceſſario id fieri ob ſummam elaſticitatem fluidorum corpuſculis minimis inſitam. Iam vero rem ipſam aggrederer, niſi quibusdam vel ſolum conſeruationis virium viuarum nomen ſtomachum mouere perſpectum haberem. Horum in gratiam monendum duco principium hoc conſeruationis virium viuarum minime differre a principio quod primum ab Hugenio uſurpatum dein ab omnibus Geometris ſine vlla controuerſia receptum fuit; nimirum corpora vi grauitatis ad deſcenſum vtcunque ſollicitata eam acquirere velocitatem vt ſi ſingula rurſus velocitate ſua finali directe aſcendant, vsque ad ſtatum quietis commune centrum grauitatis ad

 pri-

priſtinam altitudinem redeat; cui hoc Hugenii principium magis arridet, is eadem facilitate rem expediet, addendum autem eſt hoc alterum, velocitates fluidorum per vas inaequaliter amplum fluentium vbique eſſe amplititudinibus reciproce proportionales: Hiſce itaque duobus principiis totum argumentum abſoluemus.

Prop. I. *Problema.* Data celeritate, qua ſuperficies aquae in tubo quocunque mouetur, inuenire vim viuam totius maſſae aqueae.

Solutio. Sit (Fig. I.) vas ABGH, per quod fluat liquor CDFE, cuius ſitus proximus ſit *cdfe*; habeat ſuperficies CD velocitatem, quam acquireret graue cadendo ex altitudine NO. Patet autem, fore velocitatem in LM ad velocitatem ſuperficiei CD in ratione reciproca amplitudinum CD et LM vnde ſi totum fluidum concipiatur diuiſum in ſtrata infinita eiusdem altitudinis, quale eſt LM*ml*, erit vis viva cuiuslibet ſtrati, ſicuti ipſius maſſa ducta in quadratum velocitatis, id eſt, ſicuti $\frac{LM}{CD} \times \frac{CD^2}{LM^2}$, ſeu vt $\frac{CD}{LM}$. Sunt ergo vbique vires viuae in reciproca ratione amplitudinum: Hinc intelligitur, quod facta ſuper eodem axe AH alia curua QST tali, vt ſit MS vbique aequalis tertiae continue proportionali ad LM et CD fore vim viuam totius maſſae aqueae CDFE $=$ ſpatio DQTF$\times$NO. Si ſymbolis vti velimus, habebimus vim viuam quaeſitam $= aav\int\frac{dt}{s}$, vbi *a* denotat ſuperficiem CD, *v* altitudinem, qua graue cadendo acquirit

rit velocitatem iſtius ſuperficiei ; dt ſignificat elementum Mm, et s amplitudinem vaſis in ML. Q. E. I.

Prop. 2. *Theor.* Si tubus (fig. 1.) ABGH verticaliter poſitus ſit, atque maſſa aquea ſuo pondere deſcendat in ſitum CDFE, quem mox commutet cum ſitu *cdfe*; erit differentiale vis viuae ſeu incrementum vis viuae illo tempuſculo acquiſitum aequale ei, quam acquirit lapſu per Dd cylindrus aqueus cuius baſis eſt CD et altitudo DF.

Dem. Vis viua acquiſita aeſtimanda eſt ex maſſa et altitudine deſcenſus: dum vero CDFE peruenit in ſitum *cdfe*, idem eſt ac ſi aqua *cd* FE in ſuo loco permanſiſſet et aqua CD*dc* in ſitum EF*fe* perueniſſet ; eſt itaque vis viua de nouo acquiſita $= CD \times dD \times DF$ ſeu, quod perinde eſt, $CD \times DF \times Dd$. Q. E. D.

Prop. 3. *Probl.* Determinare velocitatem aquae qua fluidum ſingulis momentis effluit per tubum vtcunque formatum et quocunque foramine perforatum.

Solutio. Sit curua quaecunqua BDFG (fig. 2.) cuius applicatae horizontales DC repreſentent reſpectiue amplitudines tubi ; Deſcenderit aqua ex A in C ſitque $AC = t$, $CD = s$ amplitudo foramins deſignata per LM ſit $= b$, altitudo tota $AM = c$; vis viua totalis inſita fluido dum eſt in ſitu $DCMG = M$: velocitas, quam habet ſuperficies DC, aequalis illi quam corpus acquirit cadendo ex alt. v; concipiatur nunc aquam ex ſitu DCMLGD perueniſſe in ſitum FEONLGF ; Erit ergo per Prop. Sec. differentiale vis viuae $= DC \times CM \times CE = s \times (c-t) \times dt$ ſed poteſt idem incrementum aliter ſic definiri. Dum

aquae ſuperficies eſſet in DC, erat velocitas in FE $= \frac{s}{s+ds}\sqrt{u}$ (ſunt enim velocitates in reciproca ratione amplitudinum) et vis viua aquae FEMLGF erat $= M - svdt$; Iam poſtquam ſuperficies aquae ex DC peruenit in FE, habet velocitatem $\sqrt{u} + \frac{du}{2\sqrt{u}}$; vnde cum vires viuae ſint in duplicata ratione velocitatum, erit aquae FEMLGF vis inſita $= (Ms - vdt) \times (\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}})^2 : (\frac{s\sqrt{v}}{s+ds})^2 =$ (neglectis negligendis) $\frac{Msv - ssvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv}$, cui quantitati ſi addatur vis guttulae LMON modo e tubo egreſſae, habebitur vis, quam habet aqua poſt ſitus mutationem; eſt autem particula aquae LMON $=$ DCEF $= sdt$ et habet velocitatem quacum aſcendere poſſet ad altitudinem $\frac{ss}{bb}v$; vnde ipſius vis $= \frac{s^3}{bb}vdt$; ergo vis viua totalis aquae FEONLGF $= \frac{Msv - ssvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv} + \frac{s^3}{bb}udt$, a qua proin ſi auferatur M, habebitur differentiale vis viuae quod adeoque erit $\frac{Msdu + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Hinc habetur talis aequatio $s\ (c-t)\ dt = \frac{Msdu + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Poteſt autem per prop. 2. haberi M et datur s per t; habetur itaque aequatio inter t et u, qua mediante poteſt determinari velocitas aquae in quocunque ſitu. Q. E. I.

Prop. 4. Problema. Determinare velocitates, quibus aqua ſingulis momentis effluit e tubo cylindrico verticali,

li, ſiue ipſius foramen ſit finitum ſiue infinite partium.

Sol. Sit amplitudo ſeu ſectio cylindri ad axem perpendicularis $= n$, amplitudo foraminis $= 1$, altitudo totius cylindri aquei ante effluxum $= c$, altitudo per quam ſuprema ſuperficies iam deſcendit $= t$: Erit ergo vis viua aquae in tubo reſiduae (quam ſupra vocauimus M) $= n(c-t)v$ et quod antea vocauimus generaliter s iam conſtanter eſt n; ſubſtitutis adeoque hiſce valoribus in aequatione canonica prodibit

$n(c-t)dt = n(c-t)\,du - nudt + n^3 udt$; ponatur $(c-t) = z$ et $nn-1 = m$ et orietur $-zdz = zdu - mudz$, quae formula ad differentialia logarithmica iuxta methodum paternam reducta atque rite pertractata dat $v = \frac{c^{nn-2} z - z^{nn-1}}{(nn-2) c^{nn-2}}$

Q. E. I.

Coroll. 1. Si $n = 1$, id eſt, ſi nullus ſit fundus in tubo erit $v = c - z$, ita vt velocitas aquae eadem ſit, ac ſi graue motu naturaliter accelerato deſcendiſſet per altitudinem $c - z$; id quod quilibet ſine inſtituto calculo aſſequi potuiſſet; fuerunt tamen, qui et in hoc caſu crediderunt, aquam effluere eadem velocitate ſtatim ab initio, quam corpus acquirit cadendo ex tota altitudine aquae.

Coroll. 2. Datur ſemper locus in tubo, vbi ſi peruenerit ſuperficies aquea, ſit velocitas aquae effluentis maxima; is locus obtinetur, cum ſumitur $z = c : (nn-1)^{(1:nn-2)}$ ſitque tunc $v = c : \overline{nn-2} \times \overline{nn-1}^{\,1:(nn-2)}$

$= c : \overline{nn-1 \times nn-2}^{(nn-1):(nn-2)}$ ſiue $= c : \overline{nn-1}^{(nn-1):(nn-2)}$ et haec quantitas dat maximam velocitatem, qua ſuperficies aquae in tubo deſcendere poteſt; ſi vero eandem quantitatem multiplicemus per nn, habebitur altitudo pro generanda maxima velocitate aquae effluentis quae ſemper minor eſt quam c; quod ſi vero n ſit infinitum, degenerabit eadem in c ; vnde per noſtram methodum etiam manifeſtum fit, in caſu foraminis infinite parvi aquam ea exilire velocitate, qua corpus aſcendere poſſit ad altitudinem aquae. Hicque ſolus eſt caſus, quem ſcriptores hydraulicae recte aſſecuti ſunt. Quod ſi n ſit numerus non infinitus, ſed tamen ſat magnus, erit maxima velocitas aquae effluentis haud multum minor, quam ſi foramen eſſet infinite paruum; nam ſi n fiat $=10$ poterit aqua, maxima ſua velocitate effluens, aſcendere ad $\frac{97}{100}$ ipſius c, hancque velocitatem maximam ſtatim fere a fluxus principio acquiret, nimirum poſtquam aqua deſcendit in tubo per ſpatium $\frac{47}{10\,000}c$. Haec omnia conueniunt egregie cum experimentis.

Coroll. 3. Si n ſit numerus magnus, et aqua in tubo iam aliquousque deſcendere coepit, erunt velocitates quam proxime vti radices altitudinum aquae; quam regulam illi aſſumſerunt, qui de diuiſione clepſydrarum egerunt, veluti Cel. Varignon, Mariotte; mihi quoque de clepſydra Sphaerica mari adhibenda aliquando agenti res ita conſiderata fuit; ſed falleret tamen pauliſper regula a principio effluxus, niſi n eſſet numerus admodum magnus. Pro vera diuiſione requiritur, vt integretur

$\frac{dz}{\sqrt{u}}$

$\frac{dz}{\sqrt{u}}$ id quod ſemper fieri nequit; ſeries tamen pro hoc negotio dari poſſunt quibus mediantibus tempus quoque abſolutum evacuationis habetur quam proxime in ſingulis caſibus. Idque mihi occaſionem dedit, experimenta quam plurima inſtituendi cum variis tubis, diuerſisque foraminibus; et ſemper tempus depletionis experientia atque calculo idem fuit deprehenſum, ita, vt nunc extra dubium poſita ſit noſtra theoria; habeo autem alia experimenta in promtu, quibus res non minus ſecure ad examen reuocari poteſt.

Coroll. 4. Dederunt allegati Authores curuam pro clepſydra aequabilis deſcenſus, id eſt, in qua ſuperficies fluidi aequalibus temporibus aequaliter deſcendit; ſed fallit illa et in fine et in principio; atque circa medium ſatisfacit tantum cum foramen eſt valde paruum. Vera curua deducitur ex noſtra aequatione canonica prop. 3. aſſumendo pro v conſtantem et delendo terminum vbi ingreditur dv; ſed tantum abeſt quin ſit algebraica, vt perueniatur ad differentialia ſecundi ordinis, ſi quantitatem M eliminare velimus, eique ſubſtituere aequiualentem. Notabile interim eſt problema circa aequabilem effluxum, quod ſit algebraicum: Si nimirum (Fig. 3.) *A N* D. curua quaeratur cuius rotatione circa axem BF generetur ſolidum tale, vt ſi fluidum in illo deſcendat, tanquam in celepſydra, aequalibus temporibus aequales quantitates effluant, ſeu, quod idem eſt, vt velocitate conſtante aqua effluat. Sit igitur $FM = t$, $MN = y$, $e =$ altitudini FB, $l =$ altitudini qua graue cadendo acquirit velocitatem aquae effluentis, et erit curua aequabilis effluxus expreſſa tali aequatione $y^4 t - y^4 l + c^4 l$

=

$=o$. habet haec curua multas proprietates, quarum enumeratione, ne nimis ſim longus, ſuperſedeo; ſed quod minime tacendum puto, eſt, quod figura haec pro vaſe aequabilis effluxus eadem eſt, quae Anglorum catacta, qua phaenomena aquarum effluentium explicare contenderunt. Caeterum pro maiori confirmatione theoriae noſtrae, dicam etiam breuibus de vaſis cylindricis, quibus tubi alii cylindrici anguſtiores annexi ſunt, ſiue verticaliter poſiti (quorum phaenomena nuper publice expoſuit Cel. Bulffingerus) ſiue horizontaliter: ſiue abrupti, ſiue indefinite longi, quorum poſteriorum conſiderationem in rem phyſiologicam haud parum facere, alia occaſione oſtendam.

Prop. 4. *Probl.* Aqua currente per cylindrum ACDB (fig. 4.) cui tubus cylindricus EF infixus, determinare vbique velocitatem, qua ſuperficies aquae GH deſcendit.

Sol. Poteſt hic caſus tanquam corollarium conſiderari propoſitionis tertiae, atque ita determinari vbique velocitas ſuperficiei aqueae, donec tota effluxerit aqua ex vaſe ACDB; motus autem reliquus per tubum EF per ſe facile determinatur, quia fit iuxta leges motuum corporum vniformiter acceleratorum. Quod ſi itaque vas ab initio repletum fuerit vsque in AB dicaturque AG$=t$, AC$=e$, EF$=c$ ſuperficies GH$=n$, amplitudo tubi EF$=1$, altitudo pro generanda velocitate ſuperficiei GH$=v$, mutabitur aequatio canonica factis vbique rite ſubſtitutionibus in talem ad caſum propoſitum

fa-

faciente m $(c+e-t)\times dt = (e-t+nc)\times du + (nnu-u)\times dt$. Eandem aequationem modo particulari ita erui. Vis viua totius aquae fluentis GCEFEDH eſt $= n\times(e-t)\times v + nncv$, cuius differentiale eſt $(ne-nt+nnc)du - nudt$, cui ſi additur vis viua particulae FP effluxae, quae eſt $n^3 udt$ habetur totum incrementum vis viuae illo momento generatum, quod per Prop. 2. aequale eſt $(e-t+c)\,ndt$, et diuiſo vtrobique per n, oritur iterum $(c+e-t)\times dt = (e-t+nc)\times du + (nnv-v)\times dt$. Inter has methodos ea differentia eſt, quod priori res multo generalius expediri potuiſſet, quam poſteriori, ponendo neque vas neque tubum cylindricum ſed alia figura praeditum. Pro reducenda poſteriori hac aequatione ad quantitates finitas ponatur $t = q + e + nc$ et $v = r - \frac{c}{n+1}$, atque ſic illa mutabitur in hanc $-qdq = -qdr + (nn-1)\,rdq$, quae iterum obſeruata debitae conſtantis additione abit in hanc $q^{1-nn} \times (2r - nnr - q) = (-e - nc)^{1-nn} \times \left(\frac{ne+e+nc+2c}{n+1}\right)$ vel $\frac{\frac{nnr-2r+q}{nn-1}}{q} = (nc+2c+ne+e):(-n-1)\times(-e-nc)^{nn-1}$. Et reaſſumtis quantitatibus t et v oritur $(t-e-nc)^{1-nn} \times \left(-nnv + 2v + c - t + e + \frac{c}{n+1}\right) = (-e-nc)^{1-nn} \times \left(\frac{ne+e+nc+2c}{n+1}\right)$ ſeu $v = \left(e + c + \frac{c}{n+1} - t\right):(nn-2)$ $-\left(e+c+\frac{c}{n+1}\right)\times(t-e-nc)^{nn-1} :(nn-2)\times(-e-nc)^{nn-1}$.

Coroll. I. Si ponatur $c = o$, oritur theorema prop. 4.

Coroll. II. Si comparetur velocitas maxima cum velocitate maxima aquae effluentis in caſu $c=o$, inuenietur illa multo maior hac ; et quidem differentia eo maior eſt, quo longior eſt tubus EF. Vnde non mirum, ſi tempora exinanitionum eo ſint minora, quo tubi annexi ſunt longiores. Poſſunt autem haec omnia calculo exactius ſubiici tum ratione velocitatum , tum ratione temporum.

Coroll. III. Si tubus EF ſit indefinite longus, inuenietur alio ratiocinio ſed non multum abſimili talis aequatio $edu - tdu + nnudt + nntdu - udt = edt - tdt + ntdt$.

Coroll. IV. Si tubus EF in F paulo amplior ſit, quam in E tempus depletionis adhuc minus erit ; poteſt vero amplitudo in F eo vsque augeri , donec aqua inter effluendum lateribus tubi adhaereſcere deſinat.

Coroll. V. Si tubi EF ſint inclinati paucis mutatis idem eſt calculus ; quapropter hoſce caſus non attingam excepto illo, quo tubus eſt indefinite longus et horizontalis, quia is in aliis occaſionibus vſui venire poteſt. Quod ſi itaque cylindrus ACDB (fig. 5.) aqua plenus vsque in AB tubum habeat annexum horizontalem DE, indefinite longum , atque aqua in cylindro deſcenderit vsque ad MN, in tubo autem progreſſa fuerit vsque in R , dicatur $AC=a$, amplitudo $AB=n$, foramen $=1$, $cm=z$ et celeritas aquae MN talis quae acquireretur lapſu ex altitudine v, dico aequationem inter z et v fore talem

zu

$zv - nnzv + nnav - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}aa = o$ vel $v = \frac{aa - zz}{2(z - nnz + nna)}$.

Scholium. Experimenta quoque inſtitui cum vaſis, cui tubi ſtrictiores annexi ſunt, ſed contigit, quod praeuidi, tempora exinanitionum ſemper maiora eſſe, quam pro calculo eſſe deberent; id autem frictionibus tribuendum eſt, vbi enim aqua per foramen exilit nulla fere eſt frictio; ſed cum per canales ſtrictiores fluit, obſtacula ſunt latera tuborum. Eſt mihi methodus etiam ad calculum reuocandi huiusmodi reſiſtentias facto vnico experimento; ſed omni accuratione inſtituendo; neque enim difficulter apparet eſſe reſiſtentias in reciproca ratione diametrorum; et directa velocitatum atque tuborum longitudinum hasque reſiſtentias ſubtrahi debere a preſſione aquam ad motum ſollicitante, atque vt ſpecimen methodi exhibeam ponam vas aqua repletum *ampliſſimum*, cui tubus ſtrictus cylindricus horizontaliter infixus, eſſeque altitudinem aquae ſupra tubum $= a$, diametrum tubi $= b$, longitudinemque $= c$, velocitatem aquae exilientis talem quae debeatur altitudini x et erit reſiſtentia tubi $= \frac{nc\sqrt{x}}{b}$ (per n intelligitur numerus experimento erutus), qua ſubtracta a preſſione aquae (quae in hypotheſi foraminis reſpectu vaſis minimi proportionalis eſt altitudini aquae ſupra tubum) oritur $\frac{nc\sqrt{x}}{b} - a$, quae quantitas ſimul exprimit altitudinem ad quam aqua velocitate ſua aſcendere poſſet; vnde $\frac{nc\sqrt{x}}{b} - a = x$; et $x = \frac{nncc - 2abb + nc\sqrt{(nncc - 4abb)}}{2bb}$.

Prop. 5. Poteſt alio modo concinnius problema generale propoſitionis tertiae ſolui. Sit nimirum (fig. 6.) BDG curua, cuius axis verticalis eſt AM; abſciſſae MC denotent altitudines aquae reſiduae et applicatae CD exprimant amplitudines vaſis in eodem loco ſeu ſuperficiem aquae: GM repraeſentet fundum vaſis et LM foramen: fiat nunc alia curua SRP ſuper eodem axe talis, vt vbique ſit CR $=$ tertiae continue proportionali ad DC et LM: ſitque MC $= t$; CD $= s$, GM $= c$, LM $= b$, velocitas aquae effluentis LNOM talis, quae generatur lapſu libero corporis ex altitudine v, et erit CR $= \frac{bb}{s}$, et (per prop. 1.) vis viua inſita fluido DCMG $=$ ſpatio CRPM $\times v$; ponamus autem ſpat. CRPM $=$ N, conſideremusque decreſcente MC decreſcere N, t et v: ita habetur incrementum vis viuae aquae in vaſe reſiduae $= -\mathrm{N}dv - vd\mathrm{N}$ ſeu (ponendo loco $-d\mathrm{N}$ valorem $-\frac{bbdt}{s}$) $= -\mathrm{N}dv - \frac{bbvdt}{s}$, cui ſi addatur vis viua particulae LNOM, quae eſt $= -svdt$, orietur incrementum totale vis viuae aequandum cum $-stdt$; ergo $-\mathrm{N}dv - \frac{bbvdt}{s} - svdt = -stdt$, vel $dv + \frac{bb+ss}{N} vdt = \frac{stdt}{N}$; ponatur $\frac{bb+ss}{N} dt = d\mathrm{P}$ et $\frac{stdt}{N} = d\mathrm{Q}$, ergo $dv + vd\mathrm{P} = d\mathrm{Q}$, fiat $v = h^{-\mathrm{P}}\mathrm{R}$ (intelligendo per h numerum cuius logarithmus eſt vnitas) et erit $h^{-\mathrm{P}} d\mathrm{R} = d\mathrm{Q}$ et $\mathrm{R} = \int h^{\mathrm{P}} d\mathrm{Q}$, et denique $v = h^{-\mathrm{P}} \int h^{\mathrm{P}} d\mathrm{Q}$. Q. E. I.

Intereſſent plura alia dicenda; veluti de fluidis elaſticis, de fluidis ex vaſe per duo foramina vtcunq; poſita effluentibus (quod vltimum problema difficillimum eſt) aliisque; haec autem nunc ſufficiant. Caeterum ſequitur quoque

ex

ex theoria praeſente, vt corollarium, doctrina fluidorum in tubis oſcillantium, quod argumentum Newtonus attigit in theor. 35. lib. 2. princ. Math. Phil. nat. p. 363. edit. 3. vbi motus iſte oſcillatorius recte definitur, atque conformiter cum noſtris, quae ita egregie confirmantur: neque certe quicquam minimam patitur exceptionem, modo duo principia *conſeruationis virium viuarum* et *velocitatum reciproce amplitudinibus proportionalium* concedantur; prius in dubium vocari nequit, ſi ad frictiones aliasue reſiſtentias extrinſecas non attendatur; qui aliter ſentit, totam mechanicam reiicit, quippe conſeruatio virium aliis verbis ab omnibus fuit accepta; quod ad alterum principium, quamuis id non ad rigorem verum ſit, poteſt tamen in plerisque vaſis ſine vllo ſcrupulo accipi, nempe omnibus illis, in quibus nullus fit tranſitus ſubitaneus: at ſi v. g. vas acciperetur (Fig. 7.) ABCD perforatum in E, cui quaſi ſaccus quidam adhaereret in O, nemo non videt motum aquae ſacco O incluſae longe alium fore quam principium iſtud poſtularet; neque adeo theoria extendi poteſt ad huiusmodi vaſa valde irregularia; puto autem in hiſce caſibus nihil certi ſtatui poſſe.

Diſſertatio
de nouo quodam
CVRVARVM TAVTOCHRONARVM GENERE
Auctore
Leonh. Eulero.

I.

M. Iul. 1727. EDidit ante annum et quod excurrit D. Sully Pariſiis deſcriptionem noui cuiusdam horologii; quod peculiari modo fabricatum ad dimetienda mari tempora, et inde determinandam locorum longitudinem, perquam idoneum iudicat. Praecipuum eius inuentum, conſiſtit in nouo quodam oſcillationum genere a vacillatione trochleae circa axem petito. Idque efficit ope ponderis, trochleam ſemper verſus certum ſitum ſollicitantis. At quomodo iſtae oſcillationes iſochronae efficiendae ſint, de eo nondum plane certus eſt, cum id pendeat ab accurata deſcriptione curuae cuiusdam lineae ad id requiſitae; quam autem aliter non niſi crebra tentatione cognouit, eiusque figuram craſſa Minerua determinauit. De hac curua ad tautochroniſmum deſiderata in praeſenti diſſertatione agere animus eſt, aliosque exhibere modos, quibus aequalitas oſcillationum conſeruari poterit.

II.

II. Huc fere autem reducitur modus, quo Sully in trochlea oſcillationes obtinere conatur. In centro trochleae C applicat duas laminas incuruatas CE, CF inter quas dependet filum CP, pondere P oneratum, et hic ſitus, quo filum neutram laminam tangit, eſt naturalis. Ex quo ſi pellatur, vt filum in M alterutram laminam tangat, ex natura vectis pondus P vim habebit trochleam in ſitum naturalem ſollicitandi. Et ea propter oſcillationes orientur, dum trochlea nunc cis nunc vltra ſitum hunc naturalem extrauagabitur. *Fig. I.* *Fig. II.*

III. Hae oſcillationes, ſiue minus ſiue magis ſint amplae, vt iſochronae reddantur, id pendet a curuatura laminarum affixarum, vt haec rite determinetur: et id ipſum eſt, quod D. Sully deſiderat. Eſt autem hoc problema valde intricatum, plurimaque diuerſa complectens, quae diligenter ſunt euoluenda et diſtinguenda: Quod rotam attinet, ea cum laminis ita debet eſſe comparata, vt indifferens ſit ad quemuis ſitum recipiendum, vnde centrum commune grauitatis in axe trochleae poſitum ſit oportet. Atque id in poſterum aſſumam, vt nimiam calculi prolixitatem euitem.

IV. Circa filum conſideranda ſunt, an ſit ſemper verticale? an ſemper verſus eandem plagam dirigatur? an vero ſecus? Circa potentiam autem filo applicatam ſequentia. 1. An ipſa habeat vim inertiae? vt ſi pondus appendatur; an vero non, vt elaſtra fere. Haec probe ſunt diſtinguenda, potentia enim vi inertiae praedita non omnem vim ad trochleam mouendam impendit, ſed quidquam ad ſui ipſius motum requiritur. Cum econtra

po-

potentia inertia deſtituta omnem vim ad motum trochleae impendere queat.

V. 2. An uniformiter, i.e. ſemper aequali vi trahat, vt pondus, vel elaſtrum maxime tenſum, cuius vis in remiſſionibus non nimis magnis quaſi eadem perſiſtit; an autem modo magis modo minus agat, vt elater, chorda tenſa, aer condenſatus, vel rarefactus. Quae conſiderationes omnes diligenter in computum duci debent, vt laminarum curuatura inueniatur. Machina Sulliana maxime ex hiſce eſt compoſita. Filum CD vecti AD circa A mobili, in B eſt alligatum, et vecti in D pondus P incumbit, vnde fit, vt nec filum ſemper verticale maneat, neque pondus vniformiter trahat, et inſuper vis inertiae non exigua adſit.

Fig. III.

VI. Caſum autem ſimpliciſſimum hic primo examini ſubiicere animus eſt, et pro eo curuam quaeſitam determinare, nec non modum monſtrare, quo in praxi commode applicari poſſit: dein quantitatem cuiusvis partis definiam, vt oſcillationes abſoluantur dato tempore. Et tandem alium euoluam caſum, qui non contemnendum in re nautica vſum mihi praeſtare videtur. Simpliciſſimus vero mihi eſt caſus, quo filum perpetuo verticale perſiſtit, potentia vnformiter agens et omni inertia deſtituta applicatur.

Fig. IV.

VII. Problema hoc ſenſu acceptum ſic ſoluo. Deſignet linea CM laminam alterutram in quouis ſitu non naturali, ſitque CB linea verticalis, cui parallela erit fili directio MR curuam in M tangens; ex puncto contactus M ducatur in CB perpendicularis MT; erit haec etiam normalis in curuam. Ducatur recta CO, deſignans angulum

gulum BCO,quo machina ex ſitu naturali eſt deturbata. Centro C radio arbitrario CB deſcribatur circulus BO, cuius arcus BO metietur angulum BCO, quibus factis hoc modo curuam detego; patet potentiam ſecundum MR trahentem trochleam in ſitum naturalem perducere conari. Sit ea potentia P, erit illa vis vt P. TM. Eſt PM perpendiculum ex M in verticalem CB.

VIII. Cum autem haec vis continuo aliter reſpectu hypomochlii C applicetur, ei quaero aequipollentem radio CO in O normaliter applicandam. Producatur RM in N vsque, vbi occurrat horizontali ex C ductae, potentia P eundem edit effectum ac ſi radio CN in N applicata verſus NR traheret. At ex natura vectis eſt potentia in O applicanda et ſecundum normalem ad CO agens, aequipollensque potentiae P, ad potentiam P vt CN ſiue TM ad CO. Erit ergo ea$=\frac{P.TM}{CO}$ ſeu proportionalis, ob P et CO conſtantes, ipſi TM.

IX. Nunc ad curuam determinandam iſochroniſmum conſiderare oportet, qui obtinetur, ſi acceleratio ſpatio percurrendo ſemper proportionatur, poſſunt autem oſcillationes trochleae tanquam oſcillationes penduli CO ſpectari, quae ſi ſint iſochronae, et trochleae oscillationes tales erunt. Percurrendus vero eſt puncto O arcus BO, et huius puncti O acceleratio eſt vt vis applicata $\frac{P.TM}{CO}$ i. e. vt TM; ad obtinendum ergo iſochroniſmum oportet, vt arcus BO vel angulus BCO proportionetur ipſi TM.

X. Quum linea TM ſit in curuam normalis, in eamque CT, ex puncto fixo C, perpendicularis, atque linea CO ad curuam habeat vbique eundem ſitum; Problema huc reductum eſt, vt, data recta CO poſitione, in eaque puncto C, inueniatur curua CM huius proprietatis, vt, ducta normali MT, in eamque ex centro C perpendiculo CT, ſit linea TM proportionalis angulo TCO, ſeu differentiale ipſius TM elemento anguli TCO.

Fig. IV. et V.

Fig. V.

XI. Vt obtineam haec elementa, puncto M accipio proximum m, et ex eo duco normalem mt, priori occurrens in R centro circuli oſculatoris; in eamque demitto perpendiculum Ct priorem normalem in p ſecans; erit pT elementum lineae TM; at elementum anguli TCO eſt angulus TCp: vt ergo pT elemento ang. TCp proportionale ſit, oportet, vt ſit CT conſtans, quae eſt proprietas ſpecifica curuae inueniendae. Patet hinc puncta T et t in R cadere debere, vt pt elementum ipſius CT ſit $=o$.

XII. Vt ad huius curuae cognitionem propius accedam, centro C interuallo CB$=1$ deſcribo circulum BS, qui ſecatur a radiis CM Cm in S et s. Vocetur BS, x et CM, y; erit S$s=dx$ et $mr=dy$, ducto arculo Mr centro C; vnde ob triangula CSs, CMr ſimilia, obtinetur M$r=ydx$. Cum CT conſtans eſſe debeat, ponatur CT$=1$. Erit TM$=\sqrt{(yy-1)}$. Dein ob ſimilia $\triangle\triangle$Mrm, MTC habetur CT(1): TM $[\sqrt{(yy-1)}]=mr(dy)$: M$r(ydx)$; vnde elicitur haec aequatio $dy\sqrt{(yy-1)}=ydx$: ſeu $dx=\frac{dy}{y}\sqrt{(yy-1)}$

XIII

XIII. Ad conſtruendam ſuccinctius hanc aequationem, pono $V(yy-1)=z$; erit $y=V(zz+1)$ et $dy = \frac{dz}{V(zz+1)}$. His valoribus ſubſtitutis obtineo hanc aequationem $dx = \frac{zzdz}{zz+1} = dz - \frac{dz}{zz+1}$, quae aequatio ergo ope rectificationis circuli conſtrui poteſt. Centro C radio CB$=1$ deſcribatur circulus NBST, quem in B tangat recta BP, in qua accipiatur vtcunque BP$=z$, ducaturque CP ſecans circulum in N; erit arcus BN$\int \frac{dz}{zz+1}$, et CP$= V(zz+1)=y$. Eſt autem $x = z - \int \frac{dz}{zz+1}$: ſumatur ergo a puncto B arcus BS$=$BP$-$BN; erit BS$=x$. Radius CS in M producatur, vt ſit CM$=$CP$=y$ erit punctum M in curua quaeſita. *Fig. VI.*

XIV. Curuam hoc modo conſtructam ex ipſius circuli NBST euolutione generari obſeruo. Ducatur enim ad curuam in M normalis MT, tanget ea circulum in T, cum ex §. 11. perpendiculum CT ex C in eam normalem demiſſum ſit$=1$. Et inſuper ex eodem §. normalis TM eſt ipſe curuae in M radius oſculi, qui cum circulum continuo tangat, liquet, circulum eſſe euolutam huius curuae inuentae: adeoque ea facilius et commodius euolutione fili circulo circumducti deſcribetur.

XV. Quod iam attinet ad tempus abſolutum, id quoque ſupputandum eſt, vt liqueat, quo modo trochlea et potentiae ſint inſtituendae, vt oſcillationes dato tempore abſoluantur. Quare ad tempus totius oſcillationis inueniendum conſiderabo accelerationem quamuis momentaneam. Sit trochlea CBS homogenea et aequa- *Fig. VII.*

bilis vbiuis : ſit eius pondus $=Q$; et radius eius $CB=1$. Praeſtet potentia eundem vbique effectum ac pondus P hoc modo innoteſcet tempus vnius oſcillationis.

XVI. Ducta verticali CB conſiſtat curuae initium in loco quovis S; ſitque curua SM, in cuius puncto M tangens MQ ſit verticalis : adeoque radius oſculi BM erit horizontalis in B terminatus. Erit itaque MQ directio potentiae. Deſcendat curua in ſitum proximum, nempe punctum S in s, abibit M in m et MQ in mq; erit denuo Bm radius oſculi horizontalis. Ducantur radii CS, Cs, et rectae Cm, CM; centro C, interuallo Cm, deſcribatur arculus $m\mu$ curuae in altero priori ſitu in μ occurrens, erunt puncta m, μ duo puncta homologa et reſpondentia; ergo ang. $mC\mu = SCs$.

XVII. Peruenit porro potentia ex Q in q deſcripſit adeo ſpatiolum $Qq = m\mu$, quare ducta qn parallela BM; erit $Qn = M\mu$ propter eandem fili longitudinem et ob $CSM - Csm = M\mu$. Deſcendit igitur potentia hoc momento per Qn; vnde generari debet vis viua $P.Qn$, quae tota in trochleam transferetur : quia potentia inertiae expers ſupponitur. Vis ergo viua in trochlea, dum motu angulari SCs gyratur, augeri debet vi $P.Qn$.

XVIII. Sit velocitas puncti S, aequalis acquiſitae ex altitudine v. Erit vis viua totius trochleae $=\frac{Qv}{2}$; vnde eius differentiale $\frac{Qdv}{2} = P.Qn$; ergo $dv = \frac{2P.Qn}{Q} = \frac{2P.M\mu}{Q}$ Eſt autem ob $\Delta\Delta$ ſimilia $M\mu m$, et BmC; $M\mu : Mm = Bm :$ BC

BC; ergo $M\mu = \frac{Bm.Mm}{BC}$: at $Mm = Ss$; vnde $M\mu = \frac{Bm.Ss}{BC}$. Ergo $dv = \frac{2P.Bm.Ss}{Q.BC}$, conſequenter momentum $\frac{dv}{Ss} = \frac{2P.Bm}{Q.BC} = \frac{2P.BS}{Q.BC}$, ob BS euolutam curuae SM, adeoque aequalem radio oſculi BM ſeu B*m*.

XIX. Inuento momento $\frac{dv}{Ss}$ facili negotio reperietur longitudo penduli iſochroni hoc modo: ſit pendulum iſochronum OA oſcillans in cycloide NA. Sitque arcus AN = arcui BS et contemporaneus. Sumatur $Nn = Ss$, ducaturque verticalis *nt*, erit momentum per $Nn = \frac{nt}{Nn}$: id quod aequari debet momento $\frac{2P.BS}{Q.BC}$: Sed ex natura cycloidis eſt $\frac{nt}{Nn} = \frac{AN}{AO} = \frac{BS}{AO}$; ergo $AO = \frac{Q.BC}{2P}$. Fiat ergo vt pondus potentiae aequiualens, ad pondus trochleae, ita dimidius radius BC ad quartam, quae erit longitudo penduli iſochroni.

XX. Potentiam ideo adhibui inertia deſtitutam, ne ad velocitatem in ea generandam vis requiratur. Hinc igitur facile patet, ſi potentia ita ſit exigua, vt pondus ei ſuffectum nullam ad trochleae pondus habeat rationem ſenſibilem, vim in eo generandam reiici poſſe; adeoque loco P poterit, vt Sully vult, pondus ſubſtitui, modo valde exiguum reſpectu Q. Vt autem nihilominus oſcillationes trochleae dato tempore abſoluantur BC, inde determinari debet, fiat enim, vt Q ad 2P ita AO ad BC: ſit Q centies maius quam P, ſitque AO longitudo penduli oſcillantis ſingulis minutis ſecundis, nempe = 3166 ſcrup. ped. Rhen. erit BC = 63. ſcrup. quae eſt quantitas ſatis magna pro radio BC. Atque hoc ſenſu

 pon-

pondus ſatisfaciet appenſum, vt Sully deſiderat. Id vt ad ſenſum verticale perſeueret, neque oſcilletur, cautelae ab Autore adhibitae locum obtinebunt; praecipue vero filum ſatis longum eſſe debet, vnde ob radium BC exiguum, directio fili ſemper fere verticalis obtinebitur.

Fig. VIII. XXI. Quin et hoc modo commode iſti difficultati medebimur. Conſtruatur trochlea ED multo maior, quam circulus generator BF curuae laminis tributae, hoc modo trochleae ingens erit imprimendus motus, cum tamen pondus appenſum ob circuli BF paruitatem vix moueatur, vt motus in eo generandus merito reſpectu motus trochleae reiici queat, praecipue ſi inſuper pondus P ad trochleae pondus exiguam habuerit rationem. Illo autem caſu dicto radio trochleae CD $= a$ erit longitudo penduli iſochroni $= \frac{Q.a^4.BC}{2P}$. Hac ergo ratione horologium Sully emendatum, multo maiorem praeſtare poterit vtilitatem.

XXII. Ex dictis patet praecipuam difficultatem circa directionem fili, quod non ſemper verticale perſiſtat, verſari. Hoc vero incommodum ſequentis curuae conſtructione tolletur. Ducatur filum ante, quam ipſi potentia applicetur, per foramen quoddam fixum, hoc modo fiet, vt filum perpetuo verſus datum punctum directum ſit. Quaeſiui igitur pro hoc caſu curuam tautochroniſmum producentem, et incidi in ſequentem proprietatem.

Fig. IX. Sit C centrum trochleae, BM curua quaeſita A punctum illud fixum ſeu foramen, per quod filum ſemper tranſit

tranſit. Dictis uncn AC$=a$,et quouis radio CM$=y$. Sit porro PM normalis in curuam, et CP normalis in MP poſitis CP$=p$ et PM$=t$, deſignanteque b conſtantem pro lubitu accipiendam; hanc obtinui aequationem naturam curuae experimentem $b\sqrt{(aa-tt)}-bp=p\sqrt{(aa-tt)}$. Ex hac aequatione, cum ſit algebraica, per notas regulas curua deſiderata ope circuli rectificatione conſtruetur, ſimili modo, quo in §. 13. curua ibi inuenta erat conſtructa.

XXIII. Obtinetur autem data aequatio $b\sqrt{(aa-tt)}$ $-bp=p\sqrt{(aa-tt)}$ hoc modo: Sit C centrum trochleae, O punctum fixum ad quod filum ſemper tendit, ſeu in O ſit foramen per quod filum eſt ductum,cui infra foramen potentia inertia carens ſit applicata, vt filum perpetuo per hoc foramen O tranſeat: Sit CM ſitus quiuis curuae inueniendae, quam tangat recta OM, directio fili,in hoc curuae ſitu ex centro trochleae C demittatur in OM productam, perpendiculum; CN exprimet haec CN quantitatem vis,quam potentia filo infra foramen applicata, ad trochleam mouendam impendit, cum potentia ea ponatur conſtans. *Fig. X.*

XXIV. Ex iſochroniſmi principio autem vis ad trochleam mouendam applicata debet eſſe, vt via deſcribenda, donec in ſitum naturalem reuertatur, haec via deſcribenda menſuranda eſt ex angulo, quo ſitus hic CM a naturali diſtat, ducatur linea CB quae ex naturali ſitu peruenit in CO; erit angulus BCO ille,qui exprimit viam deſcribendam, oportet ergo vt ſit linea CN, quae exprimit vim ad mouendam trochleam in ſitu CM, pro-

por-

portionalis angulo BCO, ſeu ex puncto M ducatur MP normalis in curuam in puncto M, et ex C in eam demittatur perpendicularis CP, erit MP=CN adeoque debet eſſe MP, vt angulus BCO.

Fig. XI. XXV. Sit iam CB in ſitu naturali, fiatque ea aequalis diſtantiae foraminis a centro trochleae C, ſitque CM curua inuenienda, accipiatur punctum quoduis M in curua, in eoque tangatur curua a linea MO, centro C, radio CB deſcribatur arcus circuli ſecans tangentem in M in O, erit hoc punctum O foraminis ſitus reſpondens puncto curuae M. Ducatur linea CO; erit angulus BCO idem cum angulo BCO in fig. X. ex M erigatur perpendicularis in curuam MP, cui in P occurrat perpendiculum CP ex C in eam demiſſum, oportet hanc MP proportionalem eſſe angulo BCO, ſeu elementum ipſius MP proportionale elemento anguli BCO.

XXVI. Vt obtineam haec elementa aſſumo puncto M proximum *m*, et ducantur lineae reſpondentes *mo*, *mp*, illa tangens in *m*, et haec *mp* perpendicularis in *m*, quae in *p* ſecetur a perpendiculari C*p* in ipſam; ſecabit haec C*p* priorem perpendicularem in *t*, eritque P*t* incrementum normalis PM. Iungantur puncta C et *o*, recta C*o*, erit angulus OC*o*, incrementum anguli BCO: ad determinationem curuae CM quaeſitae igitur requiritur, vt ſit P*t* proportionale elemento angulari OC*o*. Eſt autem P*t* vt angulus PC*t* ductus in radium PC, erit ergo ang. OC*o* ad PC*t*. CP in data ratione, quae ſit 1 ad *b* vt per conſequens ſit OC*o* : PC*t*=CP*t* : *b*.

XXVII. Concurrant perpendiculares MP, *mp* in R,

in R, centro circuli oſculatoris in M erit ang. $PCt =$ MRm ob $\triangle\triangle$ PCt et pRt ſimilia, ſed angulus $MRm =$ ang. OMo, qui formatur a tangentibus proximis OM, *om*; ergo $PCt = OMo$, oportet ergo ſit $OCo : OMo =$ $CP : b$: producatur tangens OM in S, donec occurrat perpendiculo CS in ſe demiſſo, erunt demiſſo ex O in *mo* perpendiculo On, triangula Ono, OSC ſimilia; ergo $Oo :$ $On = CO : OS$. Sunt autem anguli $OCo : OMo =$ $\frac{Oo}{OC} : \frac{On}{OM} = \frac{CO}{OC} : \frac{OS}{OM}$ (ſubſtitutis loco Oo et On proportionalibus OC et OS) $= OM : OS$. Eſt ergo $OCo :$ $OMo = OM : OS$.

XXVIII. Cum autem requiratur, vt ſit $OCo :$ $OMo = CP : b$, obtinebitur haec analogia $CP : b = OM :$ OS, quae tota ab angulis libera eſt, et inde habetur haec aequatio $CP.OS = b.OM$. Eſt autem ob $\triangle COS$ ad S rectang. $OS = \sqrt{(CO^2 - CS^2)} =$ (ob $OC = CB$ et $CS = PM$) $= \sqrt{(CB^2 - PM^2)}$. Dein eſt $OM = OS - SM$ $= OS - CP = \sqrt{(CB^2 - PM^2)} - CP$; vnde haec aequatio obtinetur $CP\sqrt{(CB^2 - PM^2)} = b\sqrt{(CB^2 - PM^2)} - b.CP$. Vnde curua deſiderata determinari debet.

XXIX. Applicentur ſymbola, et vocetur CB diſtantia centri trochleae a foramine a, CP, p, et MP, t; habebitur pro curua quaeſita haec aequatio $p\sqrt{(aa \cdot tt)} =$ $b\sqrt{(aa - tt)} - bp$, quae eadem eſt cum ea quam §. XXII. exhibui. Erit ergo $p = \frac{b\sqrt{(aa - tt)}}{b + \sqrt{(aa - tt)}}$. Ex qua aequatione curua conſtrui poterit atque ad vſum applicari. Si foramen ponatur infinite diſtans a centro trochleae, erit

fili directio ſibi ſemper parallela, adeoque habetur caſus prior, quo inuenta erat CP ſemper conſtans. Poſito enim a infinito, abibit $\sqrt{(aa-tt)}$ in a et obtinebitur $p = \frac{ab}{a+b} =$ ob b reſpectu ipſius a in denominatore euaneſcens.

XXX. Si etiam in hac machina loco elateris pondus applicare commodius viſum fuerit, id vt in priori caſu quoque praeſtari poterit, iisdem obſeruandis monitis, vt pondus ſatis exiguum appendatur, radius trochleae diminuatur, aucto eius pondere, idque tantum, quoad error a vi inertia ponderis oriundus inſenſibilis euadat, machinaeque irregularitatem, quae animaduerti nequeat, inducat. Cum autem curuae ad iſtam machinam requiſitae conſtructio valde ſit operoſa, contra vero curua priori caſui, quo directio fili ad eandem perpetuo plagam tendit, conſtructu ſit facillima, priorem modum huic poſteriori fere praeferendum exiſtimo.

THEO-

THEORIA GENERALIS MOTVVM

Qui naſcuntur a Potentiis quibusuis in Corpora indesinenter agentibus, ſiue haec Corpora in vacuo ferantur siue in medio resistenti.

Auctore

Iac. Hermanno.

ETſi multa eorum quae in hoc ſchediaſmate traduntur, a celeberrimis quippe Geometris iamdudum praeoccupata, nunc peruulgata, vſu trita et vix digna iudicabuntur, quae denuo hoc loco exhibeantur, non tamen abs re fore arbitratus ſum, ſi principiorum inſtar praeſternerem ſolutionibus meis Problematum quorundam nouorum, quae in hoc argumento de motibus variatis proponi posſunt et in hac Diſſertatione expedientur, Geometrarum curioſitate forte non minus digna, quam ea quae iam pasſim cognita habentur. *M. Iun. 1727.*

Lemma Generale

1. *Potentia indeſinenter agens* (P) *ducta in elementum temporis* (*dt*) *aequipollet facto ex maſſa corporis* (M) *cui*

cui potentia applicata eſt, et elemento celeritatis (dc) *quod tempuſculo illo producitur.*

Dem. Potentia quaecunque motrix eatenus tantum potentia eſt quatenus corpori applicata motum aliquem producit, et per potentiam indeſinenter agentem intelligitur illa quae ad producendum ſuum motum tempore opus habet. Factum ex hac potentia et tempore actionis, denotat *quantitatem actionis*, et factum ex maſſa corporis et celeritate, ſeu quantitas motus producti, ſignificat id, quod actione illa effectum eſt, et quantitati actionis aequipollet; neceſſarius enim eſt nexus et indiuulſus inter quantitatem actionis et quantitatem effectus, et hunc nexum per aequipollentiam vnius cum altero interpretor; hancque aequipollentiam per notum ſignum aequalitatis deinceps indicabo, quod ſemel monuiſſe ſufficiat.

Hoc poſito ſi tempuſculo *ddt*, potentia P producit motus quantitatem M*dd*C, vbi *ddt*, et *dd*C, ſint elementa temporis et celeritatis ſecundi gradus, poſſent eorum loco adhiberi elementa vlteriorum graduum; habebimus vi eorum quae iam probata ſunt, formulam $Pddt = Mddc$. Eadem haec potentia P producet ſecundo tempuſculo *ddt* aequali primo, eandem ac prius, motus quantitatem M*dd*C, quia inter aequales quantitates actionis vnius eiusdemque potentiae idem indiuulſus eſt nexus, qui inter earum effectus, adeoque fiet iterum $Pddt = MddC$, et addendo hanc formulam ad priorem, reſultabit $2Pddt = 2MddC$, pro tertio tempuſculo *ddt*, reliquis aequali, reperitur pariter $Pddt = MddC$, quae priori

ri formulae addita praebet, $3Pddt = 3MddC$; pari argumento elicientur $4Pddt = 4MddC$, $5Pddt = 5MddC$, etc. imo $nPddt = nMddC$, vbi n deſignet numerum quemcunque; ſi n eſt infinitus, fient $nddt = dt$, et $nddC = dC$, adeo vt vltima formula $nPddt = nMddC$, iam abeat in $Pdt = MdC$. Quod erat etc.

Haec concluſio ex praemiſſis aeque neceſſario fluit, ac neceſſaria veritas eſt, quod aequalitas ſit inter totum et omnes eius partes ſimul ſumtas. Sed obiicietur forte, quid, ſi Deus talia corpora creaſſet in quibus non potentia ipſa, ſed eius quadratum, cubus vel alia quaecunque functio in temporis elementum ducta celeritatis elemento proportionalis eſſet, vt ſane talia creare potuit, nonne propoſitio iſta, potentia mobili applicata in tempuſculum ducta, proportionatur elemento celeritatis; eſt tantum contingenter vera? ego iudico quod non, et huius rei ratio eſt, quod non id, quod potentia vel ſi mauis preſſio dicitur, reapſe ſit potentia agens; ſed (vi ſuppoſitionis) eius functio ſit vera potentia accelerans.

2. *Coroll.* I. Si ſingulae moleculae corporis cuiusque vrgentur potentia aequali, quam nominabimus p, in directionibus parallelis verſus eandem plagam, potentia P vniuerſum corpus vrgens fiet $= pM$, deſignante littera M, vt ſupra, corporis maſſam; hoc per ſe liquet, potentia enim totalis P aequat omnes potentias partiales p in corpus agentes, ſed hae omnes aequantur facto ex potentia p in maſſam totius corporis M. Quodſi

eſt, formula $Pdt = MdC$, quam elicuimus, iam mutabitur in $pMdt = MdC$ vel diuidendo per M, in $pdt = dC$.

Ex hac formula vero cognoſcitur, quod omnibus corporibus, ſiue magna ſint, ſiue parua, ab aequalibus potentiis p tempore aequali, aequales acquirantur celeritates; ſepoſita reſiſtentia aeris etc.

3. *Coroll.* 2. Iisdem poſitis, ſequitur vim viuam et abſolutam (V) corporis cuiusque cuius maſſa eſt M, et celeritas C, eſſe $= \frac{1}{2} MCC$ Nam 1. nemo non fatebitur, corpus iſtud nullis externis rebus impeditum, nullaque alia vi; quam quae ipſi propter celeritatem C inſita eſt, citum, motum ſuum cum celeritate C, aequabiliter continuare, in quacunque demum linea recta moueatur, vimque eius durante hoc motu neque intendi neque remitti, ſed eandem manere. Adeoque 2. ſi vis eius vel minimum incrementum dV capere debeat, id a potentia aliqua nouiter in corpus agente tantum prouenire poſſe. Itaque 3. ſi potentia ſingulas minimas corporis moleculas inceſſanter vrgens dicatur p, et duratio actionis dt, erit iam $dV =$ quantitati motus iam corpori inſiti MC in pdt, id eſt $= MCpdt$, atqui per *Coroll.* praec. eſt $pdt = dC$ quod in aequalitate ſuffectum praebet $dV = MCdC$, quare ſumtis integralibus, fiet $V = \frac{1}{2} MCC$.

Problema generale.

4. *Si mobile quodcunque vrgetur potentiis inceſſanter agentibus ſed pro lubitu variantibus* (P), *quarum directiones conuergunt in punctum poſitione datum*, *definire mo-*

motus variatos inde prouenientes , in quacunque demum linea recta vel curua feratur, in vacuo aut in pleno.

Hoc Problema duas habet partes quarum vna reſpicit motus in vacuo altera vero motus in medio vtlibet reſiſtente.

5. Conſideremus ergo primum motus rectilineos in vacuo , quo nomine intelligendum eſt medium quod motui corporum nullum impedimentum aut adiumentum afferat.

Moueatur ergo mobile quodcunque in linea quacunque AO tranſeunte pro centrum G in quod directiones potentiarum P conuergunt, motumque ſuum a quiete incipiat in puncto A, dicantur ſpatium AB tempore quocunque t, transmiſſum $=S$, celeritas corporis in B acquiſita$=C$, eius elementum $=dC$. His poſitis erit (§. 1.) $Pdt=MdC$, vel (§. 2.) $pdt=dC$, et $pCdt=CdC$, ſed $Cdt=dS$, ergo $pdS=CdC$, et ſumtis integralibus $CC=2\int pdS$, adeoque $C=\sqrt{(2\int pdS)}$.

Hoc ſignificat, quod, ſi ordinatae Aa , BD figurae curuilineae AaDF exponantur per p , celeritas mobili in B acquiſita exponatur per latus quadratum duplae areae AaDB. *Fig. I.*

6. Igitur in hypotheſi grauitatis vniformis in qua p eſt quantitas conſtans linea curua aDF abit in lineam rectam axi AG aequidiſtantem, et celeritas in B acquiſita eſt vt $\sqrt{AB}$, atque hinc omnia ea facile deriuantur, quae *Galileus* de deſcenſu grauium in lineis rectis more ſuo demonſtrauit, quae tamen vtpote iam ſatis cognita inta-

intacta praeteribo. Hoc vnum vero ex iſta hypotheſi, quippe in ſequentibus vſui futurum adhuc deducam, nempe:

7. Quia aequatio $pdt = dC$, praebet $pt = C$, et C eſt $\sqrt{2pS}$, erit $t = \frac{\sqrt{2pS}}{p} = \sqrt{(\frac{2S}{p})}$.

8. Si p eſt vt BQ diſtantia loci B a centro G, et $Aa = b$, item $AG = a$, $AB = S$, erit $BD (= p) = \frac{ab - bS}{a}$, et $2 \times AaDB = \frac{2abS - bSS}{a}$; adeoque celeritas in B, hoc eſt, $C = \sqrt{(\frac{2abS - bSS}{a})}$ per §. 5. et t ſeu tempus per $AB = \int \frac{dS}{C} = \frac{dS\sqrt{a}}{\sqrt{(2abS - bSS)}} = \frac{dQ\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, poſito $dQ = \frac{dS}{\sqrt{(2aS - SS)}}$, atque adeo $t = \frac{Q\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, atqui $dQ = \frac{dS}{\sqrt{(2aS - SS)}}$ ſignificat angulum cuius ſinus eſt $= \sqrt{(2aS - SS)}$ exiſtente radio $= a$. Adeoque radio AG ducto circulo AH, tempus per AB erit
Fig. II. $= \frac{ang. AGH \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$, et temp. per $AG = \frac{ang. rect. \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Similiter ſi mobile deſcenſum a quiete in B inchoaret, inuenietur temp. per $BG = \frac{ang. rect. \times \sqrt{BG}}{\sqrt{BD}} = \frac{ang. rect. \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Hanc ob cauſam ſingulae AG, BG, bG, etc. aequali tempore percurrerentur, ſi mobile in his punctis A, B, b, etc. deſcenſum a quiete inchoauerit.

Fig. III. 9. Si mobile incedat in linea recta ABO quae eſt tota extra centrum G directionum ſecundum quas potentiae p in corpus agunt, motusque a quiete incipiat in A. Ducantur ex centro directionum recta GA per initium motus A, et altera GO normalis ad AB, et dicantur

AO

AO$=a$, GO$=b$, GB$=x$, eritque BO$=\sqrt{(xx-bb)}$. His poſitis.

Reſoluenda eſt potentia (p) ſecundum BG in ſuas laterales OG et BO quarum haec, quae ſecundum BO motum accelerat, illa vero ſecundum OG retunditur a plano vel linea AB, nihilque ad motum generandum confert, eſt vero potentia per BG ad potentiam per BO vt BG(x) ad BO[$\sqrt{(xx-bb)}$], quare potentia accelerans in directione BO fit $= \frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$. Et AB($=$S)$=a-\sqrt{(xx-bb)}$; adeoque $dS=\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$. Surrogatis ergo in formula (§. 5.) C$=\sqrt{(2\int pdS)}$, inuentis aeſtimationibus $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$ et $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$ pro p et dS, inuenietur C $=\sqrt{(2\int -pdx)}$. Hoc eſt, facta vbique Gβ=GB, deſcriptauue circa AG tanquam axem curua aDF cuius applicatae βD potentias centrales p exponunt; Celeritas (C) in B acquiſita deſcenſu per AB, exponetur per latus quadratum duplae areae AaDβ, ex quo et §. 5. cognoſcitur, quod celeritas in B acquiſita, deſcenſu obliquo per AB, et velocitas in β acquiſita deſcenſu recto per Aβ aequales ſint, exiſtentibus punctis B et β centro G aequidiſtantibus, in vno eodemque potentiarum accelerantium Syſtemate.

Ex demonſtratis etiam ſequitur motum in hac linea obliqua AB fore acceleratum a puncto A vsque in O, atque deinceps a puncto O verſus b retardatum vsque dum in H penitus euanuerit in diſtantia OH a puncto O aequali, diſtantiae AO. A puncto vero H regredietur

mobile verſus A accelerato motu vsque in O et abhinc retardato motu vsque in A; haecque motus reciprocatio qua corpus inter puncta A et H a medio O aequaliter diſtantia vltro citroque mouetur, continuaretur in infinitum, niſi medii reſiſtentia vel alia impedimenta externa huic motui obſtarent. Hactenus de motu rectilineo in vacuo; diſpiciendum quales ſint leges motus curuilinei.

10. Deſcendat nunc mobile citum potentiis vtlibet variantibus (P) directis ad punctum poſitione datum G; in curua quacunque ABO, et definire oportet motum corporis in hac linea

Delapſum ſit corpus in arcu curuae AB motum ſuum a quiete incipiendo , et dicatur celeritas in B acquiſita $= u$; centroque G deſcripti intelligantur arcus circulares AE, BF, *bf*, etc. porro deſcripta ſit circa axem EG , ſcala potentiarum accelerantium, EOKIH cuius applicatae FI exponunt potentias centrales p, quibus mobile ad centrum G vrgetur. Repraeſentet BN potentiam P in mobile agentem ſecundum directionem BG, cum eſt in G , ductisque per N recta NL parallela tangenti curuae in B, et BL huic tangenti perpendiculari et exponet recta NL potentiam tangentialem iuxta quam motus corporis in B acceleratur ; Sit B*b* elementum curuae per cuius terminum *b* ductus ſit centro G arculus $b\beta$, et fient triangula NBL et $Bb\beta$ ſimilia, propterea fiet $LN = \frac{P \times B\beta}{Bb}$; adeoque ſi in formula (. 1.) $Pdt = MdC$, pro P et dC , iam ponantur $\frac{P \times B\beta}{Bb}$, et du, inuenietur $\frac{P \times B\beta}{Bb} \times dt = Mdu$, vel quia $P = pM$, $\frac{p \cdot B\beta}{Bb} \times dt = du$, ducatur

hoc

hoc in u, fietque $\frac{p \times B\beta}{Bb} \times udt = udu$, atqui $udt = Bb$ in figura, quare $p \times B\beta$ (Conſtr.) $= FI \times Ii = udu$, et $uu = 2 \times EHIF$, ac per conſequens, u ſeu celeritas in B acquiſita fit $= \sqrt{(2EHIF)}$.

Tempus vero deſcenſus per AB exponetur per $\int \frac{ds}{\sqrt{(2EHIF)}}$ vbi ds ſignificat elementum arcus AB.

11. Si in eadem fig. 4. potentia tangentalis LN $= bs$, exiſtente $s = OB$, et $BN = FI = p$, erit area EHIF $= \frac{1}{2} aab - \frac{1}{2} bss$. Nam ſupra §. 10. inuenimus $LN = \frac{p \times B\beta}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{ds} = bs$, ergo $FI \times Ff = bsds$, quare area $EHIF = \int bsds$ reſpectu arcus AB, hoc eſt $= \frac{1}{2} aab - \frac{1}{2} bss$, ſi arcus totus ABO dicatur $= a$. Cum autem generaliter inuenerimus $u = \sqrt{(2EHIF)}$ erit in praeſenti caſu $u = \sqrt{(aab - bss)}$ celeritas in B acquiſita deſcenſu per AB; adeoque celeritas in O acquiſita deſcenſu per totam ABO inuenietur $a\sqrt{b}$. Tempus per AB $\left(= \int \frac{ds}{\sqrt{(2EHIF)}}\right)$ iam eſt $= \int \frac{-ds}{\sqrt{(aab - bss)}} = \frac{Q}{\sqrt{b}}$, vbi Q denotat angulum cuius ſinus rectus eſt $= \sqrt{(aa - ss)}$ et radius $= a$, quare ſi $s = 0$ fiet angulus Q rectus, et tempus deſcenſus per totam ABO exponetur per $\frac{ang.\ rect.}{\sqrt{b}}$. Per eandem hanc fractionem exponeretur tempus deſcenſus per alium quemcunque arcum curuae BO, terminatum in imo ad punctum O, ſi mobile deſcenſum ſuum in ſuperiori arcus termino B a quiete inchoauerit. In hac ergo curua omnes eiusmodi arcus AO, BO etc. aequali tempo-

re deſcribentur, ipſaque adeo curua eſt Tautochrona in omni poſſibili potentiarum accelerantium ſyſtemate.

12. Sit in ead. fig. 4. arculus curuae infimus RO indifinite paruus, adeo vt inſtar arcus circularis centro X deſcripti, ſpectari poſſit, centro G ducatur per punctum curuae R arculus RS qui aequabitur alteri RO, vt demonſtratu facile eſt. Sint $OX = e$, $GO = f$, $OK = g$, arculus RO vel $RS = dm$, erit OS ſumma ſinuum verſorum arculorum OR, $RS = \frac{\overline{e+f}\times dm^2}{2ef}$. Iam ſicut (. 11.) area $EHKO = \frac{1}{2}aab$, ita etiam $FIKD = \frac{1}{2}bss$, atque adeo $SkKO = \frac{1}{2}bdm^2$. Atqui area $SkKO = OK \times OS$ $\frac{\overline{e+f}\times gdm^2}{2ef}$ – ergo $\frac{\overline{e+f}}{2ef}\times gdm^2 = \frac{1}{2}bdm^2$, atque adeo $b = \frac{\overline{e+f}}{ef} \times g = \frac{gh}{ef}$, poſita $h = e + f$.

13. Si π deſignet peripheriam circuli cuius radius eſt $= 1$, erit $\frac{1}{4}\pi$ menſura anguli recti, cum vero temp. deſc. per AO, vel BO, aut RO ſit $= \frac{ang.\ rect.}{\sqrt{b}}$ fiet hoc $= \frac{\pi\sqrt{ef}}{4\sqrt{gh}}$, cuius duplum $\frac{\pi\sqrt{ef}}{2\sqrt{gh}}$ exponit durationem vnius oſcillationis minimae penduli $XO = e$, in omni grauitatis hypotheſi, et ſi centrum grauium ſit infinite diſtans, aequabuntur f et h, et duratio vnius oſcillationis penduli exponetur per $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$, quod ſemper rationem circumferentiae ad radium inuoluit, quantaecunque exilitatis ſint oſcillationes penduli.

14. Hoc ideo tantum monere volui, quod Cl. *Parent* in ſuis Diſquiſitionibus Mathematicis *Hugenium* de errore accuſare ſuſtinuit, eandem durationem vnius pen-

duli oſcillationis menſuram aſſignantem in Horologio Oſcillatorio, quam modo in praecedentibus eruimus; arbitrabatur enim *Parentius* tempus dimidiae oſcillationis minimae non differre poſſe a tempore deſcenſus accelerati ex dupla penduli longitudine. Sed falſus eſt Vir doctus fundamento in ſe vero ſed male applicato, *quod arculus circuli indefinite paruus ſubtenſae ſuae aequalis cenſeri poſſit*, nam ab aequalitate huiusmodi arcus cum ſubtenſa argumentari non licet, vt Vir Cl. fecit, ad aequalitatem inter tempora deſcenſus per arcum et per eius chordam, nam tempus per arculum eſt ad tempus deſcenſus per chordam eius, vt circumferentia circuli ad quadruplam diametrum. Oſtendi hoc poteſt ex ipſiſſimo principio Dn. *Parent*, aequalitatis inter arculum indefinite paruum et eius ſubtenſam.

15. Sit ergo Pendulum GO, faciens circa punctum G dimidiam oſcillationem in arcu ABO, quaeritur duratio huius dimidiae oſcillationis, ſi arcus AO et omnes eius partes ſubtenſis ſuis aequales ſtatuuntur. Sint GO $= e$, ſinus verſus OD arcus AO $= f$, grauitas g, et ponamus deſcendiſſe mobile in arcu AB, ductaque BE parallela GO, dicatur $= x$, adeoque FO $= f - x$, et ſubtenſa arcus OB vel (*hyp*) arcus ipſe $= \surd(2ef - 2ex)$, eiusque elementum negatiuum, id eſt elementum arcus AB, quod eſt $Bb = \frac{+edx}{\surd(2ef-2ex)} = \frac{+dx\surd e}{\surd(2f-2x)}$. Celeritas deſcenſu per AB acquiſita, ſeu $u = \surd 2gx$, ergo tempus per elementum $Bb \left(= \frac{Bb}{u} = \frac{+dx\surd e}{2\surd(fgx-gxx)}\right) = \frac{\frac{1}{2}dQ\surd e}{\surd g}$, exiſtente $dQ = \frac{dx}{\surd(fx-xx)}$, adeoque temp. deſc. Fig. V.

 per

per AB$=\frac{\frac{1}{2}Q\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, vbi Q eſt angulus cuius ſinus$=\sqrt{(fx-xx)}$ ad radium $\frac{1}{2}f$. Cum vero x ſit $=f$, angulus Q aequat duos rectos ſeu $=\frac{1}{2}\pi$, et $\frac{1}{2}Q=\frac{1}{4}\pi$. Quare temp. deſc. per AO$=\frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$, eiusque duplum, ſeu $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$ exponit durationem oſcillationis minimae penduli, vt ſupra iam (§. 13.) inuenimus.

Tempus vero deſcenſus per duplam penduli longitudinem, vel per chordam arcus minimi (§. 7.) exponitur per $\sqrt{\frac{e}{g}}$; quare tempus dimidiae oſcillationis minimae, hoc eſt, tempus per arculum indefinite paruum, eſt ad tempus deſcenſus per chordam eius, vt $\frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$ ad $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, hoc eſt, vt π ad 4, ſeu vt peripheria circuli ad quadruplam diametrum, vt dicebatur. Haec vero obiter dicta ſint, reuertor ad *Iſochronas.*

16. Quoniam (§. 11.) eſt area 2FIKO$=bss$, ſi arcus OB dicatur $=s$, et ſi haec dupla area dicatur$=$R, fiet $ss=\frac{R}{b}$, et $s=\sqrt{\frac{R}{b}}$, et differentiando $ds=\frac{pdz}{\sqrt{bR}}$, vocando ordinatam FI$=p$, GB$=z$, adeoque βB$=f$F$=dz$, ſit praeterea arculus $b\beta=dy$, inuenieturque dz^2+dy^2 $(=ds^2)=\frac{ppdz^2}{bR}$, atque inde $dy=\frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$. Et haec eſt generalis aequatio differentialis pro omnibus *Iſochronis* in vacuo. Nam p algebraice data eſt in z et conſtantibus, R item, ſed ſaepiſſime tranſcendenter tantum, et $b=\frac{gh}{ef}$, quare curua optata per quadraturas conſtrui poteſt.

17. Si p conſtans eſt et $= g$, ac manente, vt ſupra, GO $= f$, fiet $R = {}^{2}gz - {}^{2}fg$, et aequatio generalis $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$, mutatur in $dy = \frac{dz\sqrt{(g-2bz+2bf)}}{\sqrt{(2bz-2bf)}}$, vt haec aequatio conſtrui poſſit fiat fractio $\frac{g-2bz+2bf}{2bz-2bf} = xx$, inuenieturque $2bz = \frac{2bfxx+2bf+g}{xx+1} = \frac{2bfxx+2bfk}{xx+1}$, poſita $k = \frac{2bf+g}{2bf}$; adeoque $z = \frac{(xx+k)f}{xx+1}$; et $\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{xx+k} - \frac{2xdx}{xx+1}$. Ipſa vero aequat. different. Iſochronae abit in $dy = xdz$, vel $\frac{dy}{z} = \frac{xdz}{z} = \frac{2xxdx}{xx+k} - \frac{2xxdx}{xx+1} = \frac{2dx}{xx+1} - \frac{2kdx}{xx+k}$ atqui $\frac{dy}{z}$ deſignat in figura 4. angulum elementarem BGb, ergo ang BG$b = \frac{2dx}{xx+1} - \frac{2kdx}{xx+k}$. Sint $dA = \frac{1dx}{xx+1}$, et $dB = \frac{dx\sqrt{k}}{xx+1}k$, et fiet ang. BG$b = 2dA - 2dB\sqrt{k}$, adeoque angulus BGO $= 2A - 2B\sqrt{k} + \Delta$. Sunt vero A et B anguli quorum communis tangens eſt $= x$, ſed diuerſos radios habent, cum anguli A radius ſit 1, alterius vero B, $= \sqrt{k}$. Aſſumta vero Δ denotat conſtantem aliquem angulum addendum vel ſubducendum atque ſequenti argumento eliciendum, ſi BG($= z$) euadit $=$ OG(f), euaneſcit angulus BGO, ſed hoc caſu x fit infinita, et anguli A et B quorum communis tangens facta eſt infinita ſunt ambo recti, quare ſi r ſit nota anguli recti, praecedens aequatio ang. BGO $= 2A - 2B\sqrt{k} + \Delta$, iam abit in $(2 - 2\sqrt{k})r$, $+ \Delta = o$, et $\Delta = (2\sqrt{k} - 2)r$ adeoque aequatio
ang. BGO $= 2A - 2B\sqrt{k} + \Delta$, mutatur in ang. BGO $= 2$ *Fig. VI.*
$(r - B)\sqrt{k} - 2(r - A)$ Quae concinnam praebet conſtructionem, capiendo nempe in linea indefinita CE partes CA $= 1$, CD $= \sqrt{k}$, et in excitata perpendiculari ex puncto

cto C, abſcindendo $CB = x$, ductisque BA et BD, conſtruendo deinceps angulum CBE, qui ſit ad angulum CBD vt $\sqrt{k}$ ad 1, nam alio non opus eſt, quam vt in fig. 6. et in linea GN capiatur $GB = z$, erit enim punctum B in *Iſochrona* quaeſita.

Eſt vero $k = \frac{2bf + g}{2bf} = 1 + \frac{g}{2bf} = \frac{3e + 2f}{2e + 2f}$ reſtituendo pro $2bf$ ſuum valorem $\frac{2gh}{e}$ et pro h, $e + f$.

18. Sin vero ſit $p = \frac{gz}{f}$, fiet $R = \frac{gzz - ffg}{f}$, adeoque formula generalis $dy = \frac{dz\sqrt{(pp - bR)}}{\sqrt{bP}}$ nunc mutatur in $dy = \frac{dz}{}\sqrt{\left(\frac{(g - bf).zz + bf^3}{\sqrt{(bfzz - bf^3}}\right)}$; ponatur iterum $\frac{(g - bf.zz + bf^3}{bffzz - bf^3} = xx$, et inuenietur $zz = \frac{(xx + 1)ff}{xx + l}$, poſita $l = \frac{bf - g}{bf}$; adeoque $\frac{dz}{z} = \frac{xdx}{xx + 1} - \frac{xdx}{xx + l}$; atqui ang. $BGb\left(= \frac{dy}{z}\right) = \frac{xdz}{z} = \frac{xxdx}{xx + 1} - \frac{xxdx}{xx + l} = \frac{ldx}{xx + l} - \frac{dx}{xx + 1} = dB\sqrt{l} - dA$, factis $dA = \frac{dx}{xx + 1}$ et $dB = \frac{dx\sqrt{l}}{xx + l}$; quare fit iterum ang. $BGO = B\sqrt{l} - A + \Delta$, exiſtentibus etiamnunc A et B angulis quorum radii ſunt 1 et $\sqrt{l}$, quique communem tangentem x habent. Et hi quoque anguli recti fiunt, ſi z fit $= f$, quo caſu reperitur per ſimile ratiocinium, vt ſupra $\Delta = (1 - \sqrt{l})r$, atque adeo ang. $BGO = (r - A) - (r - B)\sqrt{l}$, quod hanc ſuppeditat conſtructionem: Capiantur iterum in linea aliqua indefinita partes $CA = 1$, et $CD = \sqrt{l}$, et perpendicularis $CB = x$, ductisque BA et BD, fiat angulus CBE ad CBD, vt $\sqrt{l}$ ad 1, et in fig. 4. angulus OGN aequalis angulo ABE in fig. 7, factaque in fig. 4, $GB = z$, erit

Fig. VII.

rit punctum B in *Iſochrona* optata. Inuenietur haec curua ABO, ex *Epicycloidum* genere, nam exiſtentibus $XO = e$ (fig. 4.) $OG = f$, $XG = b$, $GE = \sqrt{fb}$ et hoc radio circulus AE deſcribatur, curua ABO orietur rotatione circuli cuius diameter $OE = -f + \sqrt{fb}$, in caua parte circuli AE. Hoc idem iam alia via geometrica oſtendi in *Phoronomia* Prop. 19 Lib. I.

19. Pergo ad alteram partem Problematis concernentem motus variatos in medio quocunque reſiſtenti. Initium faciam a motu rectilineo. Moueatur ergo corpus in linea recta AH citum potentiis p, quarum directiones in punctum aliquod G, extra lineam AH ſitum, conuergant. Sit quaelibet $BG = x$, et perpendicularis $GO = b$, eritque $BO = \sqrt{(xx - bb)}$, et potentia accelerans in B, vt ſupra (§. 9.) $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$, reſiſtentia in loco $B = R$, celeritas ibi acquiſita $= u$, et du eius incrementum; tempuſculum vero quo id generatur $= dt$. Potentia ergo in medio reſiſtenti motum accelerans erit nunc $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x} - R$ quare (§. 2.) habebimus $\frac{pdt\sqrt{(xx-bb)}}{x} - Rdt = du$, et ducendo hanc in u, fiet $\frac{pudt\sqrt{(xx-bb)}}{x} - Rudt = udu$, at vero $udt = dS$ elemento ſpatii percurſi, quod elementum aequatur elemento negatiuo lineae $BO = \sqrt{(xx-bb)}$, id eſt, $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$; ſurrogato ergo hoc valore pro udt, in praecedenti aequatione differentiali, inuenietur $-pdx + \frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = udu$, hinc varia deriuantur. *Fig. III.*

1. Si $p = o$; fiet $\frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = udu$, pro motibus in

medio reſiſtenti a primitiue vniformi atque inſito deriuatis, nam poſita $z = \sqrt{(xx-bb)}$ formula mutatur in $Rdz = udu$, ſit vero ſpatium abſoluendum $AB = y$ eritque $dz = -dy$ et $-Rdy = udu$. Ex hac formula omnia deduci poſſunt, quae paſſim ab Autoribus tradita et demonſtrata ſunt; imo plura; nam ad quamcunque reſiſtentiarum hypotheſin extendi poteſt, ſed ſpecialioribus non immorabimur.

2. Si p et R in x et conſtantibus datae ſint, celeritas vbique acquiſita u per quadraturas exhiberi poteſt. Sed quaeſtio paulo altioris indaginis eſt cum reſiſtentiae medii per celeritates iam acquiſitas ſed nondum determinatas dantur. Nam

3. Si $R = eu^{2n}$, vbi n quemcunque numerum ſignificat, formula in hoc §. inuenta mutabitur in $-pdx + \frac{eu^{2n}xdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = udu$, vel poſita $uu = s$, erit $-2pdx + \frac{2es^{2}xdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = ds$.

Si $n = 1$, $2e\sqrt{(xx-bb)} = Log. Q$, erit $s = Q\int\frac{2pdx}{Q}$; adeoque $u = \sqrt{(Q\int\frac{2pdx}{Q})}$. Et hoc ita obtinet in hypotheſi, quae plerisque aliis magis veriſimilis eſt, quod reſiſtentiae medii ſint vt euu, id eſt in compoſita ratione denſitatum et duplicatae celeritatum actualium mobilis.

4. Si $b = o$, mutatur aequatio N. 3. inuenta in $-2pdx - 2es^{n}dx = ^{d}s$, vel mutando ſignum elementi dx, in $2pdx - 2es^{n}dx = ds$, ex qua obtinetur $dx = \frac{ds}{2p - 2es^{n}}$, quae conceſſis quadraturis conſtrui poteſt, ſi p conſtans eſt,

eſt, hic caſus obtinet, cum mobile in linea per centrum potentiarum tranſeunte incedit.

Generaliſſima tantum hic refero, nam ſi ad ſpecialiora et ſpecialiſſima deſcendendum eſſet, vix integrum volumen huic rei ſufficeret. Pergo ad motus curuilineos.

20. Cadat ergo mobile in caua parte curuae ABO, citum a potentiis p iuxta lineas BG in punctum G vergentes ipſum vrgentibus, et inquirendum ſit quanta futura ſit velocitas (u) in quocunque curuae puncto B acquiſita ſi eo in puncto reſiſtentia medii dicatur R. Dicatur $BG = z$ et curuae AC elementum $Bb = ds$, item $BN = p$, et reſoluenda hanc BN in ſuas laterales potentias BL et LN, quarum haec elemento Bb parallela altera vero BL eidem normalis. Eſt vero propter triangula ſimilia BLN et $Bb\beta$, linea $LN = \frac{-pdz}{ds}$, et haec exponit potentiam acceleratricem, abſtrahendo a reſiſtentia medii, quia nunc vero ratio eius quoque habenda eſt, potentia acceleratrix nunc erit $-\frac{pdz}{ds} - R$, detracta nempe reſiſtentia medii R a priori potentia tangentali, erit ergo (§. 2.) $-\frac{pdz}{ds}dt - Rdt = du$, vel ducendo hanc in u, iſta $-\frac{pdz}{ds}udt - Rudt = udu$, vel quia $udt = ds$, habetur $-pdz - Rds = udu$, quae aequatio conſtrui poteſt, conceſſis quadraturis ſi p, R et ds datae ſunt in z, conſtantibus et dz. *Fig. IV.*

Sed ſi, vt ſupra (§. 19. n. 3), R eſt vt eu^{2n}, aequatio $-pdz - Rds = udu$, abit in hanc $-pdz - eu^{2n}ds = udu$,

 vel

vel in iſtam $-2pdz-2er^n ds = dr$ facta nempe $uu = r$. Ex hac vero elicitur, ſi $n = 1$, vel R vt euu, et Log. Q $= es$, aequatio $r = \frac{\int 2pQdz}{Q}$, er $u (= \sqrt{r}) = \sqrt{(\frac{\int pQdz}{Q})}$. Verum in aliis reſiſtentiae hypotheſibus vbi R modificatur celeritatibus actualibus mobilis, hae celeritates per quantitates finitas hoc modo non aeque facile exhiberi poſſunt.

Fig. VIII. 21. Si mobile deſcendens in quacunque curua ABO vrgetur in quolibet eius puncto B, potentia tangentali, quam generaliter T nominabo, quae ſit vt bs, vbi b eſt quantitas aliqua conſtans, s vero deſignat arcum curuae BO, inter punctum aſſumtum B et infimum O. Celeritas mobilis in O acquiſita deſcenſu ex AO incipiente motu a quiete in A, exponetur per $AO \times \sqrt{b}$ et ſi mobile deſcenſum a quiete in B inchoet, celeritas eius deſcenſu per arcum BO in O acquiſita exponetur per $BO \times \sqrt{b}$; et ambo arcus AO et BO omnesque reliqui ad punctum O terminati, aequali tempore percurrentur, hoc eſt curua ABO *Iſochrona* erit, et hoc ita eſſe videtur ſiue mobile in *vacuo* moueatur, ſiue in *Pleno*, etſi potentiae tangentiales T aliae ſint in vacuo, quam in medio reſiſtenti. Nam in vacuo ipſae T non modificantur per celeritates actuales mobilis u, quemadmodum in medio reſiſtenti fiet, hoc tamen non obſtante $Tdt = du$, et $Tudt = udu$, vel $Tds = udu$, ſi T deſignet potentiam tangentialem in B, u celeritatem acquiſitam in B deſcenſu mobilis ex arcu AB, et ds elementum curuae Bb, quomodocunque T exprimatur per functiones celeritatis aliasque quantitates indeterminatas, nam quia etiam eſt

T (hyp.)

T (hyp.) $=bs$, erit $bsds$ ($=\mathrm{T}ds$) $=udu$, adeoque $uu=(aa-ss)b$, et $u=\sqrt{(aa-ss.b)}$, nominando arcum AO$=a$; inuenietur ergo celeritas in O deſcenſu ex AO acquiſita $=a\sqrt{b}$, exiſtente hoc caſu $s=o$. Simillimo argumento inuenietur celeritas ex BO acquiſita $=\alpha\sqrt{b}$, ſi α arcum BO ſignificet. Et ſupra iam demonſtratum eſt, quod ſtantibus hiſce, arcus AO, BO, etc. aequali tempore deſcribantur, ſi mobile in vacuo deſcendit.

Videamus iam an haec cum praecedenti §. 20. conſiſtere poſſint. Centro G ducti ſint per puncta B et O, arcus BM et OP, ſi linea AG iungat initium curuae A centro G. Et lineas AM, AP, etc. per z indicabimus, cum antea lineas GA, GB, etc. hoc nomine inſigniuerimus vocandoque iam arcus actu deſcriptos AB$=r$, eorum elementa B$b=dr$, et reſiduos BO$=s$, vt ante. Cum vero ſupra §. 20. T fuerit $=-\frac{pdz}{ds}-\mathrm{R}$ iam fiet T $=+\frac{pdz}{dr}-\mathrm{R}=bs$; adeoque $pdz=\mathrm{R}dr+bsdr=\mathrm{R}dr-bsds=eu^{2n}dr-bsds=-b^n e(aa-ss)^n ds-bsds$, propter $uu=(aa-ss)b$, vel conuertendo binomium $(aa-ss)^n$ in ſeriem inuenietur $pdz=-a^{2n}b^n eds+na^{2n-2}b^2 essds-\frac{n.n-1}{2.4}a^{2n-4}b^n es^4 ds+\text{etc.}-bsds$, et integrando $\int pdz=-a^{2n}b^n es+\frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3-\frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5+\text{etc.}-\frac{1}{2}bss+\Delta$, vbi Δ eſt quant. conſtans $\int pdz$ ſignificat omnia pdz quae in AM continentur, ſed definienda eſt quantitas Δ,

in A vbi $\int pdz = o$, fit $s = a$, adeoque $\Delta = (a^{2n+1}$ $-\frac{1}{3}(an^{2n+1} + \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n+1} -$ etc.$)b^n e + \frac{1}{2}baa$, aut ſi ponatur ad abbreuiandum $C = 1 - \frac{1}{3}n + \frac{n.n-1}{2.3.5} -$ etc. erit $\Delta = Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab$. Quare $\int pdz$ contentarum in AM $= Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab, - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3$ $- \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 +$ etc. $- \frac{1}{2}bss$, et $\int pdz$ contentarum in tota AP $= Ca^{2n+1} b^n e + \frac{1}{2}aab$; vbi $a =$ arcui AO; euaneſcente s. Similiter $\int pdz$ contentarum in MP $= Cb^n$ $es^{2n+1} + \frac{1}{2}bss$. Atqui $\int pdz$ cont. in AM $+ \int pdz$ cont. in MP $= Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab, - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}$ $a^{2n-4}b^n es^5 +$ etc. $- \frac{1}{2}bss = \int pdz$ cont. in tota AP $= Ca^{2n+1}$ $b^n e + \frac{1}{2}aab$ et deletis delendis, inuenietur $Cb^n es^{2n+1} -$ $a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 +$ etc. $= o$, vel diuiſa hac ſerie per $b^n es$, $Cs^{2n} - a^{2n} + \frac{1}{3}na^{2n-2}$ $ss - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}s^4 +$ etc. $= o$, quare indeterminata s, eſſet ſimul determinata, quod eſt abſurdum. Itaque eo quem expoſui modo *Tautochrona* in medio reſiſtenti non obtinetur. Hanc deductionem vel diſcuſſionem ideo ſupprimere nolui, quia expoſitus *Tautochronam* inueſtigandi modus mihi ipſi ſpecie ſua impoſuit et alios adhuc decipere poſſet, meliorem tamen methodum non exhibeo quia nunc primum defectus illius animaduerſus mihi eſt dum ſchedam in Academiae Conuentu praelectam reuideo et tranſcribo, et tempore nunc excludor quo minus in aliam inquirere poſſim.

22.

22. Communicabo tamen eius loco modum inueniendi *Brachiſtochronam*, ſeu lineam celerrimi deſcenſus in omni poſſibili grauitatis variabilis hypotheſi cum mobile in *vacuo* mouetur, et pro caſu particulari grauitatis vniformis et directiones parallelas habentis, cum in medio reſiſtenti incedit. Ad id autem neceſſe eſt inquirere quanam lege duo curuae elementa ad lineam aliquam poſitione datam inflectenda ſint, vt, dum vnumquodque eorum particulari ſua celeritate motu vniformi abſoluitur, breuiori tempore percurrantur ambo, quam ſi iisdem celeritatibus duo elementa aliter inflexa transmiſſa fuiſſent. Ad hoc propoſitum ſequens faciet lemma.

23. *Datis poſitione circulo* DBE *centro* O *deſcripto, et du.bus punctis* A *et* C, *hoc in caua circuli parte, altero in conuexa, ex quibus ductae ſint ad punctum aliquod* B *circuli modo nominati, duae rectae* AB, CB *hac lege, vt ſinus anguli* ABG *ſit ad ſinum anguli* OBC *in data ratione* M *ad* N. *Dico quod mobile deſcribens lineolam* AC *celeritate vt* M, *et deinceps lineolam* BC *celeritate vt* N, *breuiori tempore peruenturum ſit ex* A *in* C, *quam ſi iisdem celeritatibus per quaslibet alias* Ab *et* bC *inceſſiſſet.*

Etſi hoc lemma in caſu ſimpliciori nempe quando linea poſitione data DBE quae hic circularis eſt, eſt recta, *Hugenius* iam pridem demonſtratum dedit in Tractatu de Lumine p. 40, 41. Eius tamen demonſtrationem hic apponere e re viſum eſt. Sit punctum *b* alteri B indefinite vicinum, ductisque A*b*, C*b*, et centris A et C de- *Fig. IX.*

C deſcripti ſint per B et *b*, arculi Bβ et $b\gamma$. His iam poſitis ex natura *Minimi*, oportet vt temp. per AB + temp. per BC ſit = temp. per A*b* + temp. per *b*C, et t. per A*b* − t. per AB = t. per BC − t. per *b*C, vel quia ambae AB, A*b* eadem celeritate vniformi, M, et BC, *b*C eadem celeritate N pertranſiri ſupponuntur, erit t. per βb = t. per Bγ, atque adeo $\frac{\beta b}{M} = \frac{B\gamma}{N}$, ſeu N × βb = M × Bγ, conſiderando vero arculum B*b* inſtar ſinus totius, erit βb ſinus anguli βB*b* vel ipſi aequalis ABG, et Bγ ſinus anguli B$b\gamma$, vel OBC, quare ſufficiendo in aequalitate N × βb = M × Bγ, pro βb et Bγ, ſABG, ſCBO, naſcetur N × ſABG = M × ſCBO, atque adeo ſABG. ſCBO :: M. N. Q. E. D.

Fig. IV. 24. Hoc lemmate iam poſito, *inuenire oportet curuam* ABO *in qua deſcendens graue minori tempore a termino* A *ad terminum* O *perueniat, quam ſi in omni alia curua intra hos terminos ducta deſcendiſſet.*

Per ea quae ſupra (§. 10.) oſtenſa ſunt, celeritas mobilis deſcenſu per AB in B acquiſita exponetur per latus quadratum ex duplo areae EHIF, dicatur hoc latus quadratum Q, et exponet Q celeritatem mobilis in B, ſed per lemma praecedens propter breuiſſimum deſcenſum, exponitur quoque eadem celeritas per ſinum anguli βB*b*, quem vocabimus m, et coſinum $n = \sqrt{(1-mm)}$ radio exiſtente 1, eſt ergo $m = \frac{Q}{a}$, et $n\,[= \sqrt{(1-mm)}] = \frac{\sqrt{(aa-QQ)}}{a}$, dicantur B$\beta = -dz$, et arculus $b\beta = dy$; eritque $m.n :: b\beta(dy)\ B\beta(-dz)$, vnde elicitur $dy = \frac{-Q\,dz}{\sqrt{(aa-QQ)}}$.

In

In grauitate vniformi ſit area EHIF rectangulum $fg-gz$, ſi OE dicatur f, OB vel OF$=z$, et FI$=$EH$=g$, adeoque $Q=\sqrt{(2fg-2gz)}$, et $dy\ (=\frac{-Qdz}{\sqrt{(aa-QQ)}})=\frac{-dz\sqrt{(2fg-2gz)}}{\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, vel $\frac{dy}{z}=\frac{-dz\sqrt{(2fg-2gz)}}{z\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, ſit $\frac{2fg-2gz}{aa-2fg+2gz}=ss$, eritque $2gz=\frac{(ss+b)\times(2fg-aa)}{ss+1}$ exiſtente $b=\frac{2fg}{2fg-aa}$, adeoque $\frac{-dz}{z}=\frac{-2sds}{ss-k}+\frac{2sds}{ss+1}$, et $\frac{dy}{z}\ (=\frac{-sdz}{z})=\frac{-2ssds}{ss+b}+\frac{2ssds}{ss+1}=\frac{2bds}{ss+b}-\frac{2ds}{ss+1}=2dA\sqrt{b}-2dB$, poſitis $dA=\frac{ds\sqrt{b}}{ss+b}$, et $dB,=\frac{ds}{ss+1}$, eruntque A et B anguli communem tangentem s habentes, quorum radii ſunt $\sqrt{b}$, et 1. Fractio vero $\frac{dy}{z}$ deſignat angulum BGb, adeoque BG$b=2dA\sqrt{b}-2dB$, et integrando ang. BGO$=2A\sqrt{b}-2B+\Delta$, vbi Δ eſt quantitas conſtans quae determinatur ex ſuppoſitione anguli BGO$=o$, quod contingit in puncto O. Sit GO$=e$, fietque hoc caſu $z=e$ adeoque $s=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$, dicantur anguli quorum communis tangens eſt$=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$ et radii ſunt $\sqrt{b}$ et 1, G et H, inuenietur $2G\sqrt{b}-2H+\Delta=o$, adeoque $\Delta=2H-2G\sqrt{b}$, item ang. BGO$(=2A\sqrt{b}-2B+\Delta)=+2A\sqrt{b}-2G\sqrt{b}+2H-2B$, quae hanc conſtructionem ſuppeditat. Abſcindantur in linea indefinita partes AC$=\sqrt{b}$, et DC$=1$, et in perpendiculari ad has capiantur BC$=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$ et CF$=\frac{\sqrt{(2fg-2gz)}}{\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, ductisque ex A et D ad puncta B et F lineis AB, AF et DB, DF, fiat angulus NAF qui ſit ad angulum BAF, vt $\sqrt{b}$ ad 1, et in fig. 11. conſtituatur *Fig.* X.

 angu-

angulus BGO$=$2BDB$-$2NAF, erit facta GB$=z$, punctum B, in *Brachiſtochrona* quaeſita.

Si h eſt numerus quadratus vnitate maior Brachiſtochrona fiet *Algebraica*.

25. Generalius ſi ſit

$$z=[(ss+aa)^{\frac{\alpha}{2a}}\times(ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}}]^{h} : s^{\frac{b\alpha+a\beta}{ab}}\text{, vel}$$

$$z=[(css+aa)^{\frac{\alpha}{2a}}\times(ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}}\times(ss+cc)^{\frac{\gamma}{2c}}\times\text{etc.}]^{h} :$$

$s^{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\text{ etc.}}$, et potentia accelerans $p=-aast:(ss+1)^2$, exiſtente $t=\frac{ds}{dz}$, *Brachiſtochrona* ſemper algebraica erit, quoties α, β, γ, etc. fuerint numeri rationales quaecunque fuerint quantitas conſtantes a, b, c, &c. et h.

Haec vero de lineis celerrimi deſcenſus in vacuo ſufficiant, pergo ad eas quae in medio reſiſtenti deſcribuntur.

26. Sit ABO Brachiſtochrona quaeſita in qua ductis ad centrum potentiarum accelerantium G, radiis AG, BG, etc. OG, centroque G deſcriptis arcubus BM, OP, vocentur nunc AM $=z$, arcus AB$=s$, et ſic formula §. 20. reperta $-pdz-\text{R}ds=udu$, iam mutatur in $pdz-hu^{2n}ds=udu$, exiſtente nunc R$=hu^{2n}$. Dicatur ſinus anguli GBO$=l$, ſinus complementi $=m=\surd(1-ll)$ ſi radius ſit$=1$. Iam cum l ſit (§. 23.) vt celeritas in B acquiſita deſcenſu accelerato in arcu AB, fiat ergo $u=al$, eſt etiam $ds=\frac{dz}{m}$,

qui-

quibus in aequatione $pdz-hu^{2n}ds=udu$ ſuffectis, orietur $pdz-\frac{a^{2n}bl^{2n}dz}{m}=aaldl$, in qua p datur per z et conſtantes, et m per l, nam a et b ſunt conſtantes perinde ac exponens $2n$, ſed aequatio ita generaliter ſpectata irreducibilis eſt. Sed ſi p ſit conſtans, fiet $dz=\frac{aalmdl}{mp-a^{2n}bl^{2n}}$, adeoque $z=\int\frac{aalmdl}{mp-a^{2n}bl^{2n}}$ et $dy\left(=\frac{ldz}{m}\right)=\frac{aalldl}{mp-a^{2n}bl^{2n}}$, et angulus AGB, $=\int\frac{aalldl}{mpz-a^{2n}bl^{2n}z}$. Verum ſi directiones grauium parallelae ſint, et in figura 12 fiant abſciſſa AE$=\int\frac{aalldl}{mp-a^{2n}bl^{2n}}$, et applicata EB$=\int\frac{aalmdl}{mp-a^{2n}bl^{2n}}$, punctum B erit in Brachiſtochrona quaeſita. *Fig.XII.*

Atque hoc eſt problema quod Doctiſſ. noſter *Eulerus* Geometris propoſuit in Actis Erudit.

Sed ſi ſint $p=\frac{kl^{2n+\alpha}}{\sqrt{(1-ll)}}+1$, et $z=\frac{aal^{\alpha+2}+(\alpha+2)aac}{\alpha+2}$, curua conſtrui poteſt: Fiat enim angulus AGB$=$ *Fig.VIII.* $\int\frac{\alpha+2\,.\,l^{\alpha+2}dl}{(l^{\alpha+2}+(\alpha+2)c)\times\sqrt{(1-ll)}}$, et capiatur AM $(=z)=\frac{aal^{\alpha+2}+(\alpha+2)aae}{\alpha+2}$, erit punctum B in Brachiſtochrona, modo α non ſit $=-2$. Poſſunt inueniri adhuc aliae leges potentiarum p ad id vt Brachiſtochrona in medio reſiſtenti deſcribenda, conceſſis quadraturis, conſtrui poſſit. Sed his iam non vacat diutius immorari.

27. Si directiones potentiarum (p) non ſint conuergentes ad punctum aliquod poſitione datum, vt hucvsque aſſumſimus, ſed curuam quamcunque F G g contingant, inquiremus iam in legem variationis potentiarum (p), quae efficiant, vt mobile ſecundum lineam quamcunque proiectum in medio reſiſtenti curuam ABO deſcribat.

Fig. XIII. Tendat miſſile ex A in B, et huc delatum vrgeatur ſecundum directionem BG curuam EG in G contingentem, potentia aliqua quam nunc g nominabimus, adhibituri deinceps alio ſenſu litteram p qua eiusmodi potentis hucusque deſignauimus, ad exprimendas perpendiculares GD in tangentes curuae BD demiſſas. Dicantur praeterea tangentes BD a puncto contactus vsque ad perpendicula in ipſas demiſſa $=q$, radii vectores GB$=z$, radius oſculi in B, hoc eſt, BC$=r$; celeritas in eodem puncto B acquiſita $=u$; elementum curuae B$b=ds$, tempuſculum quo percurritur hoc elementum $=dt$. Per alterum terminum elementi curuae ducta ſit tangens bd, et huic perpendicularis gd, item gE aequidiſtans GD, ac denique Gb parallela BE. Nominentur praeterea E$\varepsilon=di$, $gb=dl$, et Gg elementum curuae FG$=dm$. His poſitis.

1. Potentia tangentalis cuius directio BE ex centrali g deriuata eſt $\frac{gq}{z}$, a qua detracta reſiſtentia medii R, reſtat potentia accelerans mobile in puncto B$=\frac{gq}{z}$ $-$R, itaque (§. 2.) $\frac{gq}{z}dt-\text{R}dt=\underline{+}du=\alpha du$, vbi α ſignificat

ficat vnitatem affirmatiuam vel negatiuam pro vtroque caſu deſcenſus et aſcenſus mobilis in curua, atque inde elicitur $\frac{gqds}{z}-Rds=\alpha udu$, exiſtente $udt=ds$.

2. Ducatur per b rectula $b\beta$ parallela BG tangenti BD occurrens in β, motusque in elemento curuae Bb ſpectari poteſt tanquam compoſitus motibus iſochronis per tangentem Bβ et per lineolam βb, quorum hic acceleratus eſt potentia g, ille vero vniformis, quare (§. 7.) $dt=V(\frac{2\beta b}{g})$ vel analytice $=V(\frac{zds^2}{gpr})=dsV(\frac{z}{gpr})=\frac{ds}{u}$, vel $uu=\frac{gpr}{z}$. Nam βb inuenietur $=\frac{zds^2}{2pr}$.

3. Diuidatur aequatio (N. I.) inuenta $\frac{gqds}{z}-Rds=\alpha udu$ per modo inuentam $uu=\frac{gpr}{z}$, reperietur $\frac{\alpha du}{u}=\frac{qds}{pr}-\frac{Rzds}{gpr}$ (aut quia proportionalitas linearum BC(r), Bb(ds), BD(q), et Eε(di) praebet $qds=rdi$) $=\frac{di}{p}-\frac{Rzds}{gpr}$ (vel quia $\pm dp=\alpha dp=gd$-GD$=g\varepsilon-g$E$+g$E$-$GD$=-di+dl$, atque adeo $di=-\alpha dp+dl$) $=\frac{-\alpha dp}{p}+\frac{dl}{p}-\frac{Rzds}{gpr}$ (aut ſi $\frac{dl}{p}=\frac{dm}{z}$ fiat $=\frac{\alpha dk}{k}$) $=\frac{\alpha dp}{p}+\frac{\alpha dk}{k}-\frac{Rzds}{gpr}$, adeoque $\frac{\alpha du}{u}=\frac{-\alpha dp}{p}+\frac{\alpha dk}{k}-\frac{Rzds}{gpr}$, quae per tranſpoſitionem terminorum et per multiplicationem cum fractione $\frac{kpu}{\alpha}$, mutetur in $kpdu+kudp-pudk=\frac{-kzRuds}{\alpha gr}$ (vel propter $R=eu^{2n}$ et $g=\frac{uuz}{pr}$) $=\frac{-ekpu^{2n-1}ds}{\alpha}$ (dicatur hoc) $=kkd$P, et habebimus $d(\frac{pu}{k})=\frac{kpdu+kudp-pudk}{kk}=d$P, et ſumtis integralibus $\frac{pu}{k}=$P,

vel $u=\frac{kP}{p}$, hinc $\frac{-ek^{2n}P^{2n-1}ds}{\alpha p^{2n-2}}\left(=\frac{-ekpu^{2n-1}ds}{\alpha}\right)=kkdP$, iſta vero vlterius reducta, praebet $P^{1-2n}dP=\frac{-ek^{2n-2}ds}{\alpha p^{2-n2}}$, ſumtisque integralibus, debitisque reductionibus inſtitutis inuenietur $P=\left(\frac{2en-2e}{\alpha}\int\frac{k^{2n-2}ds}{p^{2n-2}}\right)^{1:2-2n}$. Sed ſi $n=1$, fiet Log. $P=\int\frac{-eds}{\alpha}$.

4. Inuenimus ergo aeſtimationem litterae aſſumtitiae P per indeterminatas ad curuam AB pertinentes, et reperta eſt (N. 3.) $u=\frac{kP}{p}$, et (N. 2.) $=g\left(=\frac{uuz}{pr}\right)=\frac{kkzPP}{p^3r}$. Quae omnia erant inuenienda.

28. Si curua FG contrahitur in punctum G, vt in Fig. 14. Mutabitur k in 1, fientque adeo $u=\frac{P}{p}$, et $g=\frac{zPP}{p^3r}$, vel $gp^3r=zPP$, et hoc nobis viam ſternit inueniendi lineam proiectorum in medio reſiſtenti. Sit enim l ſinus anguli GBb, et $m=\sqrt{(1-ll)}$ eius coſinus, eritque $p=lz$, et formula $gp^3r=zPP$ abit in $gl^3rzz=PP$, vel poſita $M=l^3r$, in $gMzz=PP$, et differentiando logarithmice $\frac{dg}{g}+\frac{2dz}{z}+\frac{dM}{M}\left(=\frac{2dP}{P}\right)=\frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ (vel quia $P^{1-2n}dP=\frac{-ek^{2n-2}}{\alpha p^{2n-2}}$, et $P^{2-2n}=g^{1-n}M^{1-n}z^{2-2n}$) $=-\frac{2ek^{2n-2}}{\alpha}l^{2-2n}g^{n-1}M^{n-1}ds$, id eſt $\frac{dg}{g}+\frac{2dz}{z}+\frac{dM}{M}$

=

$= \frac{-2eg^{n-1} k^{2n-2} M^{n-1} ds}{al^{2n-2}}$, haec aequatio ſic generaliter ſumta irreducibilis eſt.

29. Sed ſi g ſit conſtans, et directiones potentiarum g ad infinitam tantum diſtantiam ſint conuergentes, id eſt, parallelae, euaneſcent ambo membra logarithmica ex aequatione, quae ideo in $\frac{dM}{M} = \frac{2eg^{n-1} k^{2n-2} M^{n-1} ds}{al^{2n+1}}$ mutabitur, ex iſta vero propter $k=1$, et $ds = \frac{Md}{l^3 m}$, poſitaque $g=1$, fit $\frac{dM}{M} = \frac{-2eM^n dl}{al^{2n+1} m}$ et haec praebet $M^{-n-1} dM \frac{-2edl}{al^{2n+1} m}$, et ſumtis integralibus $M^{-n} = \int \frac{2endl}{al^{2n+1} m}$, quare $M = \left(\int \frac{2endl}{al^{2n+1} m}\right)^{-1:n}$. Inuenta ſic aeſtimatione literae aſſumptae M, coordinatae lineae proiectorum non difficulter inuenietur, conceſſis quadraturis.

Fiant enim (Fig. 15.) $AC = \int \frac{Mdl}{llm}$, et $CB = \int \frac{Mdl}{l^3 mm}$, vbi $m = V(1-ll)$, eritque punctum B in linea proiectorum quaeſita. Huius lineae conſtructionem iam dedi in *Phoronomia* Anno 1715 edita pro caſu reſiſtentiae ſecundum duplicatam rationem celeritatum mobilis procedentis, eiusdemque conſtructionem dederunt Cel. *Iohannes* et *Nicolaus Bernoulli*, in Actis Erudit. 1719. Menſ. Maio pro caſu quando $R = eu^{2n}$, ſed nihilo difficilior eſt analyſis pro hoc caſu generaliori quam pro altero.

In praecedentibus vbi quantitates integrandae occur-

currerant, integralibus earum quantitates conſtantes breuitatis cauſſa non addidi, quae alias addi ſolent, adeoque per ſummam vbique intelligendum eſt integrale completum quale quaeſtioni cuique competit. Quod hoc loco monendum eſſe duxi; ne quis exiſtimet additionem illam quantitatum conſtantium per incuriam omiſſam fuiſſe.

30. Sed ſi directiones potentiarum g conuergunt in punctum G, vt in *fig.* 14. et dicantur $O = \int \frac{Ldl}{l}$, exiſtente L quantitate vt libet data per l et conſtantes, $M = \frac{llL(3-2nO)^{1:3-2n}}{L+(3-2n)O}$, $N = \left(\frac{2en-2e}{\alpha}\int l^{2-2n} dO\right)^{1:1-n}$, et $z = (3-2n.O)^{1:3-2n}$ ſitque $g = M^{-1}Nz^{-2}$, curua proiectorum etiam conſtrui poteſt. Fiat enim angulus $AGB = \int \frac{ldO}{3-2n.mO}$, et capiatur in linea GM pars $GB = (3-2nO)^{1:3-2n}$, erit punctum B in curua quaeſita.

In hac curua erit $r = \frac{L(3-2n.O)^{1:3-2n}}{l(L+3-2n.O)}$. Quod ſi vero L fuerit $= l^\beta$, et $\frac{\beta}{3-2n}$ quilibet numerus rationalis, curua erit algebraica. Sed de his ſatis.

Fig. XVI. 31. Ex ſimilibus principiis varia alia Problemata facilem ſolutionem admittunt. Vt *ſi corpus* B *in curua quacunque* CB *grauitate ſua deſcendat poſt ſe tamen trahens alterum minus corpus* A *filo* ACB *ſuper trochleam* C *mobile annexum, quodque aſcendere cogatur in altera curua* AC, *et quaerantur celeritates horum corporum vbiuis acquiſitae.* Analyſis inſtitui poteſt, vt ſeque-

quetur, poſtquam lineis et lineolis ad rem facientibus nomina dederimus: Sint ergo CB$=x$, EB$=y$, elem. curuae bB$=ds$, B$n=dx$ et BO$=dy$, celeritas in curuae puncto B$=u$, celeritas corporis A in directione AC$=v$ item $am=dp=dx$; $al=dq$, et A$a=dr$. Sunt vero Am et bn arculi centro C deſcripti, et Al ac bo lineolae horizontali DE parallelae. His poſitis ita argumentor.

1. Inquiro in potentiam qua corpus B propter grauitatem vrgetur ſecundum directionem bB, ad id dico vt Bb (ds) ad Bo (dy) ita pondus B ad $\frac{Bdy}{ds}$, et haec eſt potentia qua grauitas corpus B vrget ſecundum bB. Sed nondum eſt tota vis accelerans, nam corpus A grauitate ſua ipſi reſiſtit.

2. Propter ſimilem rationem $\frac{Adq}{qr}$ eſt potentia quae corpus A propter grauitatem ſuam vrget iuxta Aa et ſi fiat Aa(dr): ma(dp) :: $\frac{Adq}{dr}$: $\frac{Adpdq}{dr^2}$, et hoc exponet potentiam qua filum Ca vel BC trahitur ex B in C. Dicatur praeterea Bb(ds) : Bn(dx) :: $\frac{Adpdq}{dr^2}$: $\frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$ et haec vltima fractio exponit reſiſtentiam, quam deſcendens corpus B ab altero A in directione bB ſubit. Hanc ob cauſam potentia mobile B accelerans reperitur $=\frac{Bdy}{ds}-\frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$.

3. Incrementum celeritatis in AC vel CD eſt $=dv$, adeoque incrementum celeritatis corpori A com-

petentis in directione $bB = \frac{dxdv}{ds} = \frac{vdv}{u}$, quia $u : v :: ds:dx$, ergo quantitas motus in vtroque corpore geniti $= Bdu + \frac{Avdv}{u}$.

4. Cum potentia accelerans ducta in tempuſculum $\frac{ds}{u}$, producat motus quantitatem $Bdu + \frac{Avdv}{u}$, habebimus $\frac{Bdy}{u} - \frac{Adpdqdx}{udr^2} = Bdu + \frac{Avdv}{u}$, atque adeo $Bdy - \frac{Adpdqdx}{dr^2} = Budu + Avdv$, et ſumtis integralibus $By - \int \frac{Adpdqdx}{dr^2} = \frac{1}{2}Buu + \frac{1}{2}Avv$ (vel propter $v = \frac{udx}{ds}$) $= \frac{1}{2}Buu + \frac{Auudx^2}{2ds^2}$; Atque hinc elicitur $uu = \frac{\left(2By - 2\int \frac{Adp^2dq}{dr^2}\right) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$. Quare ſi fiat $TV = \frac{\left(By - \int \frac{Adp^2dq}{dr^2}\right) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$, et graue libere cadat ex hac altitudine TV, in V acquiret tantam celeritatem, quantam corpus B acquiſivit in curua CB.

Si curua CA fiat linea recta verticalis parallela ipſi EB, ſingulae dp, dq et dr fient $= dx$, et habebimus hoc caſu $TV = \frac{(By - Ax) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$.

Hoc vnum eſt ex Theorematis illis quae V. Cel. *Ioh.*

Ioh. Bernoulli litteris XI. Oct. 1727. datis ſine demonſtratione miſit, et ex conſeruatione virium viuarum ipſe deduxit.

32. *Sit graue aliquod figurae cuiuscunque* BFG, *cuius centrum grauitatis ſit in* C, *ex quo et radio* CA, *deſcriptus circulus* AHL *repraeſentet axem cui circumvolutum intelligatur filum ſecundum ordinem litterarum* EALHALHAL etc. *Ipſum vero corpus grauitate ſua deſcendat, quod aliter fieri nequit quam rotando circa centrum* C, *filo ſeſe euoluente ſecundum ordinem litterarum* AHLH etc. *Quaeritur quanta ſit celeritas centri* C *poſtquam graue ex altitudine* EC *vel* EA *cecidit.*

Sint EC vel EA altitudo ex qua mobile rotando cecidit $=$R, eius elementum $Cc = dR$, velocitas centri C$=u$, eius incrementum tempuſculo dt ortum $=du$. Radius axis CA$=a$. Maſſa totius corporis compoſiti ex BFG et axe ALH$=$M. Diſtantia eius centri oſcillationis a puncto A$=$D; quodlibet elementum P totius maſſae M$=dp$, eius diſtantia PA ab axe rotationis in A parallelo axi cylindri ALH$=q$. Eritque centrum grauitatis totius maſſae M etiam in C quia corpus BG eiusque axis ALH commune habent grauitatis centrum C. His poſitis F. XVII.

Quia vniuerſum corpus BG$+$ALH, rotatur circa axem A, incrementum celeritatis cuiusque particulae eius P inuenietur $=\frac{qdu}{a}$, et eius momentum reſpectu axis A$=\frac{qqdpdu}{a}$, quare ſumma momentorum, id eſt vniuer-

 ſus

ſus motus genitus ſit $= du\int\frac{qqdp}{a}$ (id eſt, propter $\int qqdp$ ex natura centri oſcillationis $= a$DM) $=$ DMdu.

Sed potentia accelerans eſt $=$ M × AC $= a$M ſi grauitas ſit $= 1$, erit ergo aM$dt =$ DMdu, vel $adt =$ Ddu, ſeu $audt =$ Dudu, id eſt, propter $udt = d$R, habetur adR $=$ Dudu, vel ſumtis integralibus $2a$R $=$ Duu; atque adeo $uu = \frac{2aR}{D}$. Iccirco corpus in vacuo libere cadens grauitate naturali ex altitudine $z = \frac{aR}{D}$, in imo huius altitudinis celeritatem acquiret aequalem illi, quam centrum grauitatis C maſſae M acquiſiuit cadendo ex altitudine EC.

Et hoc quoque vnum eſt ex theorematibus illis quae laudatus Bernoullius per Cl. Filium Academiae communicauit, ſed ſine demonſtratione.

F. XVIII. 33. *Sed quanta celeritas acquiretur globo* DBE, *ſi in caua parte curuae cuiuscunque* ABO *rotando deſcendat?* Sint iterum celeritas globi in B $= u$, radius globi BC $= a$, radius circuli oſculatoris curuae in B, ſeu BF $= r$; Bb $=$ Be $= ds$; B$\beta = dx$; inuenietur arculus $be = \frac{(r-a)ds^2}{ar}$, et ſi ſectores bBe et CBc ſimiles ſint, erit Cc elementum ſpatii tempuſculo deſcribendi, $= \frac{(r-a)ds}{r}$ Eſt vero potentia accelerans vis tangent. grauitat. × BC × M, ſed ſi gravit. $= 1$, erit $\frac{dx}{ds}$ vis tang. grau. quare potentia accelerans eſt $= \frac{aMdx}{ds}$; motus vero genitus inuenitur iterum vt in praeced. $=$

$=DMdu$, ſi D centri oſcillationis diſtantiam a puncto B vel alio quocunque ſuperficiei puncto, et M maſſam globi deſignent, erit ergo $\frac{aMdxdt}{ds}=DMdu$, ſeu $\frac{audxdt}{ds}=Dudu$, atqui eſt $udt=Cc=\frac{(r-a)ds}{r}$, ergo $(\frac{ar-aa}{r})dx=Dudu$, ſumtisque integralibus et poſtea inſtitutis reductionibus inuenietur $uu=\frac{2ax}{D}-2\int\frac{aadx}{rD}$ (propter $D=\frac{7a}{5}$) $=\frac{10}{7}x-\int\frac{10adx}{7r}$. Verum vocando ſinum anguli ABH quem applicata HB cum curua facit $=l$, fiet $dz=rdl$, exiſtente ſinu toto $=1$, adeoque $\frac{adx}{r}=adl$, hinc $uu=\frac{10x+10ab-10al}{7}$, ſi b ſignificet ſinum complementi anguli quem curua AB cum axe AH facit. Vocandoque $BH=x$, $AH=y$, erit $l=\frac{dy}{ds}$, hanc ob cauſam habebimus $uu=\frac{10xds+10abds-20ady}{7ds}$.

Itaque graue quodcunque libere cadens in vacuo ex altitudine $z=\frac{5xds+5abds-5ady}{7ds}$ celeritatem acquiret aequalem illi quam globus DE rotando acquiſiuit in curuae puncto B.

Sed ſi idem globus DE rotando deſcendiſſet in plano inclinato, tunc fuiſſet $z=\frac{5x}{7}$; nam hoc caſu fit bds quoque $=dy$.

DE DIVISIONE CVRVARVM

In partes quotcunque quarum ſubtenſae ſint in data progreſſione.

Auct.

C. G.

M. Iul. 1726.

ETſi non ignorabam iam diu a Celeb. Iohanne Bernoullio inuentas eſſe formulas ad diuiſionem anguli in datas quascunque partes, tamen quia easdem memoria non tenebam, feci ipſe inueniendi periculum.

Fig. I.

Sit diuidendus arcus BD in partes quotcunque aequales DE, EF, FG etc. dataque ſit perpendicularis $CD = m$ et radius circuli $AB = a$, ponatur ſubtenſa partis quaeſitae $DE = x$.

Primum quaero perpendicularem EK determinandam per x et quantitates datas hoc modo: ponatur $EK = y$, erit (pro angulo acuto) EL vel (pro angulo obtuſo) $DL = KC = \sqrt{x^2 - (m-y)^2}$, ſed $AC = \sqrt{a^2 - m^2}$ ergo $AK = \{\pm AC \mp KC\} =$ $\{\pm\sqrt{a^2-m^2} \mp \sqrt{x^2 - m^2 + 2my - y^2}\} = \sqrt{a^2 - y^2}$ ex qua aequatione fit $y = \frac{(2a^2 - x^2)m \pm x\sqrt{(a^2 - m^2)(4a^2 - x^2)}}{2a^2}$, haec y ſi ponatur $= o$ obtinebitur valor x determinatus per

per quantitates datas a et m pro angulo in nullas partes diuidendo ſeu ſubtenſa ipſius arcus dati BD$=$
$\sqrt{2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2-m^2}}$.

Ex perpendiculari EK iam determinata per x et quantitates datas, ſimili modo eruuntur deinceps reliquae FM, GN, HO donec perueniatur ad perpendicularem ex B ducendam quae ſit $=o$ atque ex hac aequatione tandem determinatur ſubtenſa quaeſita x.

Ponamus igitur compendii cauſa $\frac{2a^2-x^2}{2a^2}=f$ et
$\frac{\pm x\sqrt{4a^2-x^2}}{2a^2}=p$.

$$fm + p\sqrt{a^2-m^2}=\alpha.$$
$$f\alpha + p\sqrt{a^2-\alpha^2}=\beta.$$
$$f\beta + p\sqrt{a^2-\beta^2}=\gamma.$$
$$f\gamma + p\sqrt{a^2-\gamma^2}=\delta. \text{ etc.}$$

pro arcu in duas partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\beta=o$; pro arcu in tres partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\gamma=o$; in quatuor, per aequationem $\delta=o$. etc.

Si vero numerus partium, in quas diuidendus eſt arcus non ſit rationalis, ſed ſurdus quicunque n ſtatuatur ſeries terminorum quos modo produximus

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+ \text{ etc.}$$

et per methodum interpolandi quaeratur terminus medius

dius exponenti illi ſurdo n reſpondens, qui terminus abibit in ſeriem infinitam

$$x = \alpha$$
$$+(\beta-\alpha)(n-1)$$
$$+(\gamma-2\beta+\alpha)(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)$$
$$+(\delta-3\gamma+3\beta-\alpha)(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Fig. II. Ex diuiſione arcus facile deducitur modus eundem multiplicandi. Sit datus arcus multiplicandus BH. Rad. $AB=a$, perpendicularis $HO=m$, $BO=a-\sqrt{a^2-m^2}=b$. Sumta $HG=BH=\sqrt{b^2+m^2}$ ponatur perpendicularis quaeſita $GN=y$, fiet $GL=y-m$, $HL=\sqrt{b^2-y^2+2my}$. $=ON$.

$$\text{Ergo } AN=AB-BO-ON=a-b-\sqrt{b^2-y^2+2my}$$
$$=\sqrt{AG^2-GN^2}=\sqrt{a^2-y^2}.$$

vnde fit $y=\frac{2am(a-b)}{(a-b)^2+m^2}=GN$ perpendiculari arcus duplicati BG, ex qua per ſimilem aequationem $AM=AN-MN=\sqrt{AF^2-MF^2}$ eruitur FM perpendicularis arcus triplicati BF etc.

Haec diuiſio et multiplicatio arcus quamuis generalis ſit, tamen cognito fonte inuentionis conſiderari poteſt vt caſus ſingularis huius problematis multo generalioris: data ratione inter abſciſſas et applicatas alicuius curuae, diuidere eandem curuam in partes quotcunque datas, ita vt ſubtenſae partium ſint in ratione data quacunque.

Sit

Sit curua data AB, diuidenda in partes quotcunque quarum ſubtenſae ſint in ratione data numerorum 1, e, f, etc. Abſciſſa data AC$=a$, applicata BC$=b$, ponatur ſubtenſa incognita BD$=x$ et determinabitur ex natura curuae perpendicularis ſeu applicata DF per x et quantitates datas a et b, atque ſi in hanc ipſam formulam omnibus locis vbi reperitur a ſubſtituatur valor inuentus pro AF; vbi reperitur b ſubſtituatur valor inuentus pro DF et omnibus locis vbi reperitur x, ſubſtituatur ex, habebitur applicata EG determinata per x et quantitates datas a, b, e et ſimili modo reliquae inueſtigabuntur, donec perueniatur ad vltimam euaneſcentem, qua poſita$=o$ determinabitur ſubtenſa x per datas quantitates a, b, e, f, etc. *Fig. III.*

Exempl. 1.

Diuidatur arcus circuli datus BD in partes quotcunque DE, EF, FG, etc. quarum ſubtenſae ſint in ratione data numerorum 1, e, f, etc. Sit datus vt ſupra radius AB$=a$, perpendicularis DC$=m$, ponatur ſubtenſa incognita DE$=x$, erit perpendicularis. *Fig. VI.*

Prima EK $\frac{(2a^2-x^2)m \pm x\sqrt{(a^2-m^2)(4a^2-x^2)}}{2a^2} = \alpha.$

Secunda FM $\frac{(2a^2-e^2x^2)m \pm ex\sqrt{(a^2-\alpha^2)(4a^2-e^2x^2)}}{2a^2} = \beta.$

Tertia GN $\frac{(2a^2-f^2x^2)m \pm fx\sqrt{(a^2-\beta^2)(4a^2-f^2x^2)}}{2a^2} = \gamma.$ etc.

donec perueniatur ad perpendicularem euaneſcentem. Quodſi igitur datus arcus diuidendus ſit in duas partes quarum ſubtenſae ſint vt 1 ad e determinabitur ſubtenſa quaeſita x (euaneſcente ſcilicet perpendiculari ſecunda) per aequationem $\beta = o$, vel, ſi totam aequationem explicare placeat;

$$\begin{array}{lllll} e^8 x^8 & -8e^6 x^6 & +8m^2e^4x^4 & -32m^2e^2x^2 & +16m^4 = o. \\ +4m^2e^4 & -16m^2e^4 & +16e^4 & -32m^2 & \\ -2e^4 & +8e^4 & +64m^2e^2 & & \\ +1 & -16m^2e^2 & -32e^2 & & \\ & +8e^2 & +8m^2 & & \\ & -8 & +16 & & \end{array}$$

ſi datus arcus diuidendus ſit in tres partes quarum ſubtenſae ſint in ratione numerorum datorum 1, e, f, determinabitur x per aequationem $\gamma = o$. etc.

Exempl. 2.

Fig. V. Sit diuidenda curua AB cuius abſciſſae ad applicatas ſint vt cu ad u^n (abſciſſa data AC$=ca$, applicata BC $=a^n$) in partes quotcunque, quarum ſubtenſae ſint in progreſſione data numerorum 1, e, f, etc. Ponatur ſubtenſa quaeſita BD$=x$, DE$=ex$, EH$=fx$. etc. ſi fiat DF$=y$, erit AF $=cy^{\frac{1}{n}}$, ergo FC$=$DL$=ca-cy^{\frac{1}{n}}=\sqrt{x^2-(a^n-y)^2}$ et quadrando vtrumque

$$c^2a^2-2c^2ay^{\frac{1}{n}}+c^2y^{\frac{2}{n}}=x^2-a^{2n}+2a^ny-y^2.$$

iam valor ipſius $y=$DF per hanc aequationem expreſſus ponatur $=\alpha$, et fiat EG$=z$, erit DK$=\alpha-z$, DE$=ex$,

EK

$EK = \sqrt{e^2x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2} = FG$, ergo $AG = AF -$ $FG = c\alpha^{\frac{1}{n}} - \sqrt{e^2x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2}$ quae ſi diuidatur per c et quotiens eleuetur ad poteſtatem n dabit

$\left(\alpha^{\frac{1}{n}} - \frac{\sqrt{e^2x^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2}}{c}\right)^n = z$, = perpendiculari ſecundae EG et ſimiliter applicatae reliquae inueſtigabuntur donec perueniatur ad vltimam euaneſcentem, qua poſita $= o$ determinabitur x per datas quantitates.

Vt caſum aliquem determinatum huius exempli euoluamus, propoſitum ſit datam parabolam AB vbi abſciſſae ad applicatas ſint vt cu ad u^2 et data abſciſſa AC $= ca$, BC $= a^2$, ita diuidere in D vt ſubtenſa BD ſit = applicatae DF. Fiet $n = 2$, $y = x$, ergo ſubtenſa quaeſita $BD = x = \frac{2a^6 + a^2c^4 + a^4c^2 \pm 2a^3c^2\sqrt{2a^2 + c^2}}{(2a^2 - c^2)^2}$. *Fig. VI.*

Atque ex his iam ſatis conſtare arbitror quomodo data aequatione inter abſciſſas et applicatas alicuius curuae diuidi poſſit ipſa curua in partes quotcunque datam progreſſionem ſubtenſarum ſeruantes, nam quae ſupra de numero ſurdo partium in quas diuidendus ſit arcus et de multiplicatione ipſius arcus diximus, ea in quauis curua cuius datur aequatio, ſuccedunt. Negari interea non poteſt, ſi in multas partes diuidenda ſit curua propoſita, aequationes pro determinandis ſubtenſis mirum in modum creſcere et differri, ſed haec qualiscunque difficultas ex ipſa curuarum natura, non vitio methodi quam ſecuti ſumus, oritur.

DE VSV INTERPOLATIONIS IN SOLSTITIORVM MOMENTIS INDAGANDIS

Auctore

F. C. Maiero.

M. Sept. 1727.

Difficilis et anceps ab Aſtronomis iudicari ſolet ſolſtitiorum inuentio; nam ob inſenſibilem fere declinationum ſolſtitialium mutationem, incertum eſt, quo die et momento ſol in maxima declinatione extiterit. Halleius tamen modum excogitauit, quo ſolſtitiorum momenta certius deteguntur quam ab aliis vnquam factum fuit: (vid. D. Greg. Elem. Aſtr. p. 221. etc.) Contigit et mihi vnum alterumue modum comminiſci queis forſan paria praeſtare licet. Primus nititur interpolationis methodo a Neutono tradita (vid. Pr. Ph N. p. m. 446.) quem et hoc ſcripto exponere conſtitui. Cum vero theorema Neutoni ad aliam formam redegerim, opportunum mihi viſum eſt totam interpolandi doctrinam meo more breuiter recenſere prius, eique ſuperſtruere ſolſtitiorum inuentionem. Alterum modum quem reperi alio tempore communicabo quoque.

Ca-

Caput. I.

De Interpolationibus.

1. Exponantur duae quantitatum datarum ſeries quaecunque

1	- - -	m	n	p	q	r	s	- - -
2	- - -	a	b	c	d	e	f	- - -

ita vt cuiuis quantitati prioris ſeriei reſpondeat ſua competens in ſecunda ſerie, quae ſit ex priori ſecundam certam legem genita, dicantur autem prioris ſeriei quantitates *radices*, poſterioris ſeriei *functiones* ſuarum radidicum. Hic igitur duae poterunt oriri quaeſtiones; ſi enim intermedia alia quaeuis radix aſſumatur, quaeri poteſt quae ſit eius functio competens? et viciſſim, ſi intermedia quaeuis alia functio aſſumatur, quaeri poteſt, quae ſit eius radix competens? Solutio harum quaeſtionum vocatur alioquin *Interpolatio.*

2. Si lex cognita ſit qua functiones ex ſuis radicibus generantur, in promtu eſt quaeſtionum ſolutio. Eo igitur res redit, vt lex quaedam pro ſeriebus expoſitis inueniatur. Eiusmodi legi inueniendae Neutonus theorema generale praeſcripſit. Quomodo vero tale theorema inueniri poſſit, in eo ſum vt oſtendam.

3. Ponam primo ſeries datas duabus ſolum conſtare quantitatibus, ſint eae tales:

1 - - - - m n

2 - - - - a b

Supponatur lex qua functiones ex radicibus generantur hac exprimi formula, $\alpha+\beta x$, vbi x quamcunque radicem ſignificat, α autem et β ſint conſtantes ex datis m, n, a et b determinandae hunc in modum.

poſito $x=m$ erit

1 - - - $\alpha+\beta m=a$ adeoque

2 - - - $\alpha=a-\beta m$

deinde poſito $x=n$ erit

3 - - - $\alpha+\beta n=b$ adeoque

4 - - - $\alpha=b-\beta n$

ex ſecunda et quarta aequatione fit porro

5 - - - $b-\beta n=a-\beta m$

6 - - - $b-a=\beta n-\beta m$

7 - - - $\beta=\frac{b-a}{n-m}$.

ex hac et ſecunda ſiue quarta habetur

8 - - - $\alpha=\frac{an-bm}{n-m}$.

ergo lex quaeſita erit

9 - - $\frac{an-bm}{n-m}+\frac{b-a}{n-m}x$ ſiue $a-(a-b)\frac{x-m}{n-m}$

4. Secundo ponam duas ſeries trimembres tales

1 - - - m n p

2 - - - a b c

earumque legem generalem $\alpha+\beta x+\gamma x^2$. Valores itaque conſtantum α, β, et γ eodem modo reperiuntur quo

quo ante, (§. 3.) vt neceſſe non ſit calculum integrum huc apponere ; iſtis legitime ſubſtitutis habebitur lex quaeſita $= a-(a-b)\frac{x-m}{n-m}+[a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)]$ $\frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}$

5. Tertio, poſitis duabus ſeriebus quadrimembribus

$$\begin{array}{lllllll} 1 & - & - & - & m & n & p & q \\ 2 & - & - & - & a & b & c & d \end{array}$$

earumque lege $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ eruetur, ſicut ante, quaeſita lex

$$=a-\left\{\begin{matrix}+a\\-b\end{matrix}\right\}\frac{x-m}{n-m}+\left\{\begin{matrix}+(p-n)a\\-(p-m)b\\+(n-m)c\end{matrix}\right\}\frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}-$$

$$\left\{\begin{matrix}+(p-n)(q-n)(q-p)a\\-(p-m)(q-n)(q-)p)b\\+(n-m)(q-m)q-n)c\\-(n-m)(p-m))p-n)d\end{matrix}\right\}\frac{(x-m)(x-n)(x-p)}{(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)}.$$

Sic pergere licet ad reliquas ſerierum ſpecies, ſed eo opus non eſt, quia ex inuentis formulis earum cognatio mutua iam affulget. Quaelibet enim ſequens maioris ſeriei formula conſtat ex antecedenti formula nouo aucta membro. Huius autem noui membri genitura ex formatione reliquorum cognoſci poteſt leui adhibita attentione.

7. Superſedeo ergo deſcriptione generationis membrorum, addoque hic duntaxat membrum quod acce-

accedit priori (§. 5.) formulae, vt ex ea formetur lex ſerierum quinquimembrium.

Ecce illud!

$$+\left\{\begin{array}{l} +(p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)a \\ -(p-m)(q-m)(r-m)(q-p)(r-p)(r-q)b \\ +(n-m)(q-m)(r-m)(q-n)(r-n)(r-q)c \\ -(n-m)(p-m)(r-m)(p-m)(r-n)(r-p)d \\ +(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)e \end{array}\right\}\times \frac{(x-m)(x-n)(x-p)(x-q)}{(n-m)(p-m)(q-m)(r-m)(p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)}$$

8. Hoc illud theorema eſt, quod (§. 2.) inueniendum mihi propoſui, quodque, vt apparet, alius eſt formae quam theorema Neutoni. Speciale fit hoc theorema ſi loco radicum generalium m, n, p etc. Sumantur numeri naturaliter progredientes 1. 2. 3. 4 etc. Erit enim hoc caſu $a+(b-a)\frac{x-1}{1}+(c-2b+a)\frac{(x-1)}{1}.\frac{(x-2)}{2}$ $+(d-3c+3b-a)\frac{x-1}{1}.\frac{x-2}{2}.\frac{x-3}{3}$. etc.

9. Poſſunt radices pro abſciſſis et functiones pro applicatis alicuius curuae haberi, (quod fecit Neutonus) atque ita problema ſoluere licet de inuenienda curua parabolici generis quae per data puncta tranſeat. Sed propoſitum meum non fert vt plura de hac re

re dicam. Supereſt, vt vſum interpolationis in ſolſtitiis indagandis commonſtrem.

Caput II.

De inueniendis ſolſtitiorum momentis.

10. Obſeruentur ante et poſt ſolſtitium altitudines ſolis meridianae, ex quibus eligantur quatuor qualescunque. Ex. gr. hoc quem agimus anno 1727 Petroburgi obſeruatae ſunt ſequentes altitudines ſuperioris limbi ſolaris

Iunii die, ſt. v.

4to erat alt. ☉	=	53°. 39′. 40″.
7 - -	=	53. 46. 10.
11 - -	=	53. 49. 10.
14 - -	=	53. 46. 45.

eligo autem quatuor, quia hic numerus omnium commodiſſimus eſt. Poſſem plures, ſi prolixum calculum non faſtidirem; poſſem pauciores ſi laxus eſſe vellem.

11. Porro, vt calculus omnium fiat compendioſiſſimus, pro numero qui diem primae obſeruationis ſignat (hic pro 4.) ponatur 0, itemque pro altitudine meridiana prima. Reliqua ſequantur ſuo ordine. Hoc nimirum:

Dies	Altitudines		
0 - - -	0″	=	0.15
3 - - -	390″	=	26.15
7 - - -	540″	=	38.15
10 - - -	425″	=	29.15.

Imo vt omnis vitetur prolixitas, negligendo communem factorem functionum, fiant

dies - - -	0.	3.	7.	10.
altitud. - - -	0.	26.	38.	29.

12. Habeantur dies pro radicibus et altitudines pro functionibus, vt formula condi poſſit generalis quae omnes altitudines ad datos quoscunque dies dierumque momenta contineat, idque per formulam §. 5. exhibitam, in qua $m=0$, $n=3$, $p=7$, $q=10$, $a=0$, $b=26$, $c=38$ et $d=29$. Quia vero in hoc negotio breuitatis gratia ſemper ponitur $m=a=0$ ideo formula dicta commodiori hac forma poterit exhiberi

$$+\left(+\frac{bqp}{n(p-n)(q-n)}-\frac{cnq}{p(p-n)(q-p)}+\frac{dnp}{q(q-n)(q-p)}\right)x$$
$$-\left(+\frac{b(p+q)}{n(p-n)(q-n)}-\frac{c(n+q)}{p(p-n)(q-p)}+\frac{d(n+p)}{q(q-n)(q-p)}\right)x^2$$
$$+\left(+\frac{b}{n(p-n)(q-n)}-\frac{c}{n(p-n)(q-p)}+\frac{d}{q(q-n)(q-p)}\right)x^3.$$

13. Surrogatis ſurrogandis habebitur communis formula omnium altitudinum $=\frac{2309x-160xx-xxx}{210}$, quae ſua vniuerſalitate etiam complectitur maximam altitudinem, hoc eſt, ſolſtitialem.

14. Vt igitur momentum maximae altitudinis (h. e. valor ipſius x.) impetretur, formulae elementum nihilo aequandum eſt, ſicuti praecipitur in methodo de maximis et minimis, quo facto ſequens emergit aequatio.

$$3x^2+320x-2309=0.$$

15. Reducta hac aequatione, fiet,

$$x=6.784.$$

maxima ergo altitudo incidit in diem 6. 784 ſed huic

diei

diei quaternarius eſt addendus (ob §. 11.) vt emergat ſolſtitii momentum factum Iunii die $10.784 = 10^{D}.48^{H}.19'$.

16. Subſtituto hoc valore ipſius x. (§. 15.) in formula altitudinum, (§. 13.) adhibitaque dexteritate, cuius te admonet articulus 11, erit ſuperioris ſolaris marginis altitudo maxima

	=	53°.	49′.	11″.
auferatur ſemidiam. ☉	=		15.	51.
alt. max. centri ☉	=	53.	35.	20.
auferatur refractio	=			56.
alt. max. ☉. vera	=	53.	32.	24.
auferatur declinatio ☉ max.	=	23.	29.	
alt. aequat.	=	30.	3.	24.
alt. Poli Petroburg.	=	59°.	56′.	36.

17. Manfredi Ephemerides hoc momentum ſtatuunt ad Iunii diem 10. 16^{H}. $32'$.
meae vero tabulae ſolares ad Iunii D. 10. 15. 26.

18. Ex aliis altitudinibus inueni idem momentum ſolſtitii incidiſſe in Iun. 10^{D}. 15^{H}. $21'$.
item ex aliis, in Iun. 10. 15. 7.
quibus tabulae meae pulcre congruunt.

De Conſtructione Aequationum Differentialium primi gradus per viam ſeparationis indeterminatarum.

Auct. I. Hermanno.

M. Aug. 1726.

POſteaquam in Commentariis ſuperioris Anni *pag.* 149. *ſeqq.* theoremata quaedam pro inueniendis integralibus quantitatum differentialium exhibui, quae pluralitas indeterminatarum et ſecunda differentialia non morantur, atque adeo late patentia ſunt, vt pluribus exemplis ibi adductis id monſtraui. Communicabo nunc aliud Theorema non minus vtile, cuius ope innumerarum aequationum differentialium primi gradus, quae forte aliis methodis inacceſſae haberi poſſint, per viam ſeparationis indeterminatarum cum ſuis differentialibus a ſe inuicem, conſtructio, conceſſis quadraturis, exhiberi poteſt. Omnes aequationes illae ad hanc $y = Px + Q$ reuocantur, in qua x et y ſunt coordinatae curuae conſtruendae, P vero et Q vtlibet compoſitae ſint ex tertia indeterminata z et conſtantibus. Ex hac aequatione inueniri poſſunt aeſtimationes indeterminatarum x et y per z et conſtantes (ſaltem tranſcendenter) in hypotheſi, quod $dy = zdx$. Huc facit ſequens

Theo-

Theorema.

Si ſint Log. $R = \int (dP : zR - PR)$ *et* $dy = zdx$, *erunt* $x = RS$, *et* $y = PRS + Q$ *indeterminatae aequationis* $y = Px + Q$. Poſſet hoc ſtatim ſynthetice demonſtrari, ſed malo analyſin eius hoc loco adducere. Aequatio $y = Px + Q$ differentiata praebet $dy = Pdx + xdP + dQ$, et diuidendo hanc per $(z - P)x$ proueniet $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{z-P} + \frac{dQ}{(z-P)x}$ (aut faciendo $\frac{dR}{R} = \frac{dP}{z-P}$, et $\frac{dQ}{(z-P)x} = dZ) = \frac{dR}{R} + dZ$, et multiplicando aequationem per Rx, inuenietur $Rdx = xdR + RxdZ$, vel etiam $\frac{Rdx - xdR}{RR} = \frac{xdZ}{R}$ (vel reſtituto valore $dZ) = \frac{dQ}{zR - RP} = dS$, et ſumtis integralibus $R^{-1}x = S$, et $x = RS$, abit ergo $y = Px + Q$, in $y = PRS + Q$, quare ſi *Log.* $R = \int (dP : z - P)$, et $S = \int (dQ : zR - PR)$ erunt $x = RS$, et $y = PRS + Q$. Primo intuitu hoc theorema nullius aut exigui ſaltem vſus eſſe, videbitur, ſed exempla quae ſequuntur, et plura alia, quae propter temporis anguſtiam intacta praeterire cogor, oſtendent quam late patens ſit.

Exemplum 1.

Sit $adx + bdy + cxdx + exdy + fydx$ aequatio conſtruenda; haec vero per hypotheſin $dy = zdx$, mutatur in $a + bz + cx + ezx + fy = o$. Iſta vero ad formam theorematis redigetur, ponendo $P = (-ez - c) : f$, et $Q = (-bz - a) : f$, inueniuntur autem $dP : z - P = -edz : (e + f.\ z + c) = R^{-1} dR$, hinc $R =) [(e + f) z + c]^{-e : e + f}$, et $dS (= dQ : zR - PR) = [(e + f) z + c]^{-f : e + f} \times bdz$, cuius

 inte-

integralis eſt $S = \Delta - \frac{b}{e}[(e+f)z+c]^{e:e+f}$, exiſtente Δ conſtanti quantitate, hinc elicitur $x\,(=RS) = \Delta [(e+f)z+c]^{-e:e+f} - \frac{b}{e}$, ex iſta vero deriuatur ſequens $[(e+f)z+c]^{e:e+f} \times (ex+b) = e\Delta =$ ex acquatione vero $a+bz+cx+ezx+fy=o$, obtinetur $(e+f)z+c = \frac{-cfx-(cef+ff)y-ae-af}{ex+b}$ quare inuenta aequatio abit in $(cfx+efy+ffy+ae+af+bc)^e \times (ex+b)^f = C$, vbi C eſt alia quantitas conſtans.

Exemplum 2.

Si quaeratur curua huius proprietatis, vt quaelibet eius tangens, ſit ad partem axis inter tangentem et initium curuae, in data ratione n ad 1, inuenietur aequatio differentialis eius eſſe $nxdy - nydx = yds$, quae iterum conſtrui poteſt ponendo $dy = zdx$, et ſi praeterea fiat $r = \sqrt{(zz+1)}$, mutabitur aequatio in $nzx - ny = ry$, eritque adeo $P = \frac{nz}{n+r}$, et $Q = o$. Atqui $\frac{dP}{z-P} = \frac{ndz}{rz} - \frac{ndr}{nr+rr} = \frac{dR}{R}$ (propter $zz = rr-1$) $\frac{ndr}{rr-1} - \frac{ndr}{rr+nr} = \frac{\frac{1}{2}ndr}{r-1} - \frac{\frac{1}{2}ndr}{r+1} = \frac{-dr}{r} + \frac{dr}{r+n}$, hinc elicitur $R = (r-1)^{n:2} \times (r+n) : (r+1)^{n:2} \times r = x$. Vel $(r-1)^{n:2}(r+n) = rx(r+1)^{n:2}$, vel $(r-1)^n \times (r+n)^2 = rrxx\,(r+1)^n$, ſed aequatio $nxz - ny = ry$, praebet $z = z = nnxy + Qy : nnxx - yy$, exiſtente $Q = \sqrt{(nnxx+nnyy-yy)}$ adeoque $r\,(= nxz - ny : y) = nyy + nQx : nnxx - yy$. Quod ſi in praecedenti aequatione ſubſtituatur, proueniet $(nyy + yy - nnxx + nQx)^n$

× $(n$

$\times (n^3 xx + nQx)^2 \times C = (nnxx + nyy - yy + nQx)^n \times (nyy + nQx)^2 xx.$ Aequatio curuae quaeſitae, ex qua cognoſcitur eam fore algebraicam quoties n eſt numerus rationalis.

Si $n=1$, fiet $Q=x$, et praecedens aequatio mutabitur in $xx=2cy-yy$, facta nempe $C=cc$.

Si $n=2$, fiet $Q=\sqrt{(4xx+3yy)}$ et aequatio generalis mutabitur in ſequentem $(3yy-4xx+2Qx) \times (4xx+Qx) \times a = (4xx+2Qx+yy) \times (Qx+yy)x.$

Plures ſolutiones Problematis huius exempli, quod Cel. *Ioh. Bernoulli* Geometris olim propoſuit, a praeſtantiſſimis eorum iam pridem exhibitae fuere, ſed nulla adhuc, quod ſciam, analyſis eius publice extitit.

Exemplum 3.

Sit conſtruenda aequatio $xdx+ydy=dx\sqrt{(xx-4yy)}$, quae facta $dx=zdy$ mutatur in $xz+y=z\sqrt{xx-4yy}$, ex qua elicitur $x=-(4zz+1)y:2z$, quare $P=-(4zz+1): 2z=-2z-\frac{1}{2z}$, et $z-P=3z+\frac{1}{2z}$, propterea inuenitur $R^{-1}dR(=dP:z-P)=\frac{dz}{z}-\frac{10zdz}{6zz+1}$, adeoque $(6zz+1)^{\frac{5}{6}} \times R=az$, ſed propter $xz+y=z\sqrt{(xx-4yy)}=Qz$, poſita nunc $Q=\sqrt{(xx-4yy)}$, et $z=y: Q-x$, et $(6xz+1)= 2xx+2yy-2Qx : 2xx-4yy-2Qx$; fiet

$(2xx-2Qx+2yy)^{\frac{5}{6}} \times (Qx-xx) = (2xx-4yy-2Qx)^{\frac{6}{7}} ay,$

haec

haec vero aequatio, inſtitutis debitis reductionibus, reducitur ad ſimpliciorem $(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}Q)\times(x-Q)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{6}{5}}$.

Hoc exemplum ex Cel. *Gabrielis Manfredi* Tract. de Conſtructione aequationum differentialium primi gradus pag. 137. ſumtum eſt, vbi etiam curuae aequationem algebraicam ab hac in ſpecie differentem, ſed reapſe conſentientem non modo inuenit, ſed analyſin ſuam quoque expoſuit. Haec aequatio naturam illius lineae explicat quae omnes parabolas circa communem axem deſcriptas quarum Parametri diſtantiis verticum a dato in axe puncto aequales ſunt, ad angulos rectos traiicit. Huius Traiectoriae Cl *Ioh. Bernoulli* etiam aequationem algebraicam exhibuit in Comm. Acad. Scient. Pariſienſis.

Exemplum 4.

Diuidere Parabolam Conicam cuius Parameter eſt $=a$, in data ratione n ad 1. Dicantur abſciſſae, maior y et minor x, et inuenietur aequatio differentialis $dy\sqrt{(4y+a)}=ndx\sqrt{(4x+a)}$, fiat nunc iterum $dy=zdx$, et inuenietur $y=\frac{nnx}{zz}+\frac{ann-4azz}{4zz}$, quare ſunt in hoc exemplo $P=nn:zz$, et $Q=(ann-azz):4zz$, adeoque $dP=-2nndz:z^3$, et $z-P=(z^3-nn):zz$, hinc $R^{-1}dR$ $(=dP:z-P)=-2nndz:z^4-nnz$, et $dQ=-anndz:2z^3$. Fiat $z^3=nnu$, ſeu $z=n^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}$, et fiet $\frac{dR}{R}(=\frac{dP}{z-P})=\frac{-2du}{3uu-3u}$ $=\frac{2du}{u}-\frac{2du}{3u-3}$; atque adeo $R=u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$, et dS $(=\frac{dQ}{zR-PR})=-\frac{1}{6}adu:u^{\frac{5}{3}}\times(u-1)^{\frac{1}{2}}$, et ſumtis integralibus $S=\Delta-\frac{1}{4}au^{-\frac{2}{3}}\times(u-1)^{\frac{2}{3}}$; vbi Δ eſt conſtans. Verum x

(=

$(=RS)=\Delta\times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}a$, adeoque $(4x+a)=4\Delta \times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$. Aequatio vero $y=\frac{nnz}{zz}+\frac{ann-azz}{4zz}$, praebet $z=u\times(4x+a)^{\frac{1}{2}}\times(4y+a)^{-\frac{1}{2}}$, adeoque $u(=z^3:nn)$ $=n\times(4x+a)^{\frac{3}{2}}\times(4y+a)^{-\frac{3}{2}}$, qui valor in aequatione paulo ante inuenta $4x+a=4\Delta\times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$ ſuffectus, et reliquis neceſſariis reductionibus peractis, ſuppeditabit aequationem $y=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}[n(4x+a)^{\frac{3}{2}}-(n-1)a^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}}$, qua magnitudo abſciſſae y definitur, arcus parabolae, qui debet eſſe ad alterum arcum cuius abſciſſa x, in data ratione n ad 1.

Hoc theorema eſt prorſus nouum, etſi enim Cel. *Ioh. Bernoulli* in *Actis Erudit.* 1698. elegantem modum expoſuit, quo per comparationem trapeziorum Hyperbolicorum cum arcubus Parabolicis, duo arcus aſſignari poſſunt, datam ad ſe inuicem rationem habentes, et poſt ipſum *Illuſtr. Hoſpitalius* ex eodem fundamento, ſed aliam viam ſecutus in *Tractatu Analytico de Sectionibus Conicis*, tales arcus pariter elicuit, non ſunt tamen hi arcus datam rationem habentes terminati ad verticem, immo neuter eorum, ſed maior minorem ſemper includit. In hac vero formula ambo arcus parabolae datam rationem ſeruantes incipiunt in vertice parabolae.

Scholium 1.

Methodus noſtra in altioribus aequationibus non

ceſſat, modo hae aequationes altiores in duos factores diſcerpi poſſint, quorum vnus indeterminatas y et x tantum in primo gradu conſiſtentes contineat, quod, ſi non ſemper, ſaepe tamen effici poteſt. Sit v. gr. aequatio $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$, in qua litterae capitales A, B, C, D etc. quantitates ex tertia indeterminata z et conſtantibus vtlibet compoſitas denotant. Aequatio duos factores $\alpha y+\beta x+\gamma$, et $y-\delta x+\varepsilon$ admittet, exiſtentibus

$\alpha=A$

$\beta=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}K$, poſita $K=\surd(BB-4AC)$

$\gamma=(-2AE+BD):K$

$\delta=(-B+K):2A$

$\varepsilon=(2AE-BD+DK):2AK$, modo F ſit

$=(2AE-BD+DK)\times(-2AE+BD):2AKK$.

Vterque factor ad rem faciet, nam ponendo $\alpha y+\beta x+\gamma=o$, inuenientur $P=-\beta:\alpha$, et $Q=-\gamma:\alpha$, vbi ſingulae α, β, γ per A, B, C, D, E (quae ipſae continent indeterminatam z et conſtantes) datae ſunt, adeoque aequationes $Log.\,R=\int dP:z-P$, et $dS=dQ:zR-PR$, conceſſis quadraturis conſtrui poſſunt.

Sin vero miſſo factore $\alpha y+\beta x+\gamma$, alterum $y-\delta x+\varepsilon$ adhibere velimus fient $P=\delta$, et $Q=-\varepsilon$, et hae quantitates etiam datae erunt per z et conſtantes atque adeo per quadraturas aequatio ipſa conſtrui poteſt.

Scholium 2.

Quia vero modus ſcholii praecedentis conditione aliqua limitatur, quae impedit quo minus aequatio generalis

ralis $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$ conſtrui poſſit, alia via eſt indicanda.

Si aſſumantur $M=y+ax-b$, et $N=cy+x+f$, vbi a, b, c et f ſunt coefficientes aſſumtitiae, inuenientur $y=-M+aN-af-b): ac-1$, et $x=cM-N+bc+f:ac-1$. Hinc $AMy+CNx=Ayy+Aaxy+Cxx-Aby+Cfx$
$+Cc$
$=-AMM+AaMN-CNN-(Aaf+Ab)M+(Cbc+Cf)$
$+Cc$
$N: ac-1$ (aut poſitis $Aa+Cc=B$, $\alpha=-Aaf-Ab$, et $\beta=Cbc+Cf)=-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N:ac-1$. Quodſi praeterea ſint $-Ab=D$, vel $b=-D:A$, et $Cf=E$ ſeu $f=E:C$, fiet $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex=-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N: ac-1=o$, ſed aequatio $-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N=o$, praebet $2AM=+BN+\alpha+\sqrt{[KKNN+(2B\alpha+4A\beta)\times N+\alpha\alpha]}$, exiſtente, vt antea, $K=\sqrt{(BB-4AC)}$, ſed vt haec vltima rationalis fiat, faciamus $K\alpha=B\alpha+2A\beta$, aut ſcribendo ad abbreuiandum G pro B-K, erit $-G\alpha=2A\beta$, vel reſtituendo aeſtimationes litterarum α et β, fiet $AGaf+AGb=2ACbc+2ACf$, (vel propter $Ab=-D$, et $f=E:C$) $\frac{AGE}{C}a-DG=-2CDc+2AE$, hinc enim elicientur,

$a=(2ACE+CDG-2CCDc):AGE$, et propter $Aa+Cc=B$, reperietur

$c=(2ACE-BEG+CDG):2CCD-CGE$. et

$a=(8ACCDE-2BCDEG-2ACEEG+4CCDDG-CDEGG):(2CD-EG)\times AFE$. Item

$\alpha=(8ACDE-2BDEG-2AEEG+2CDDG-DEGG):(2CD-EG)\times G$

$\beta=(-AEEG+BDEG-CDDG)\times(2CD-EG)\times A$

Ex aequatione vero $2AM=BN+\alpha+\sqrt{[KKN+(2B\alpha+4A\beta)N+\alpha\alpha]}$ fit $2AM=(B+K)N+2\alpha=HN+2\alpha$ poſita $H=B+K$. Atqui $2AM=2Ay+2Aax+2Ab=2Ay+2Aax-2D$, et $HN+2\alpha=Hcy+Hx+Hf+2\alpha$, Ergo $2AM=HN+2\alpha$ producit $y=(\frac{2Aa-H}{cH-2A})x-(\frac{D+fH+2\alpha}{cH-2A})$; quare ſi fiant $P=(2Aa-H):cH-2A$, et $Q=-(D+fH+2\alpha):cH-2A$ habebimus $y=Px+Q$, et ſic reducta eſt aequatio $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ey+o$, ad formulam requiſitam, ſi litterae capitales A, B, C, D et E datae ſint per indeterminatam z et conſtantes, nam ſingulae a, b, c, f, α et β per haſce A, B, C, etc. datae ſunt, atque adeo aequatio $Ayy+Bxy+$ etc. $=o$ conſtrui poteſt per quadraturas. Sed conſtructio ſecundum hunc modum perficienda aliquas reſtrictiones patitur, nempe excipiendi ſunt caſus vbi $a=\frac{1}{c}$, aut $c=2A:H$, vel $2CD=EG$.

Ex-

Exempl. 4.

Si conſtruenda ſit aequatio $ayydy + byydx + cxydy + exydx + fxxdy + gxxdx + hydy + kydx + lxdy + mxdx = o$. Fient facta $dy = zdx$, $A = az + b$, $B = cz + e$ $C = fz + g$, $D = hz + k$, et $E = lz + m$, hae quantitates in formulis praecedentibus, valores litterarum aſſumtitiarum definientibus ſurrogatae, praebebunt P et Q per z et conſtantes expreſſas, adeo vt aequatio per quadraturas conſtrui poſſit. Sed ad vitandam prolixitatem in aequatione differentiali conſtruenda, ſint a, g, h et m ſingulae $= o$, et $bf = ce$, et $bf = ce$ reperientur ſaluo errore calculi litterae aſſumtitiae, nempe

$b = k : b$; $c = + b : cz$; $f = l : f$

$a = (bfkl - bell)z + cekk - 2ell) : efk - eel$; $G = 2e$ et $H = 2cz$,

$a = (2cceek - cefk - ceel)z + 2effkk) : befkl - beell$

Sed hoc caſu fit $cH = 2A$, quare praecedentes determinationes in caſu quod $ce = bf$, non inſeruiunt, ſed ſi b, c, e, f ſint quaecunque aliae quantitates aequatio per praecedentia conſtrui poterit.

Aliter adhuc aequatio $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ex + F = o$, deprimi poteſt, quomodocunque cöefficientes A, B, C, D, E, et F compoſitae ſint ex tertia indeterminata z, et quantitatibus conſtantibus, aſſumendo has duas aequationes $y = t + au - b$ et $x = t - u + c$, in quibus, vt apparet, t et u ſunt nouae indeterminatae, et a, b, c ſunt coefficientes aſſumtae. Nam ſi hae nouae indeterminate t et u, in aequationem datam Ayy $Bxy + Cxx + Dy + Dx + F = o$, introducantur, naſcetur alia aequatio, quae, factis

$e=(ABE-2ACD+BBE-2BCD+BCE-2CCD):$
$(4AAC-ABB+4ABC+4ACC-B^3-BBC).$
$f=(BDE+BEE+CDD-CEE-(B+2C)^2F):$
$4AAC-ABB+4ABC+4ACC-B^3-BBC)$
$b=-e+\surd(ee+f)$
$c=[(2A+B)b-E]:(B+2C)$
$a=(Bb-2Cc-E):(2Ab-Bc-D)$
mutabitur in $(A+B+C)\ tt+(2Aa+Ba-B-2C)tu+(Aaa-Ba+C)uu=o$, haec vero, factis
$2f=(2Aa+Ba-B-2C):(A+B+C)$,
$g=(Aaa-Ba+C):(A+B+C)$, et $k=-f+\surd(ff-h)$ abit in $t=ku$. Sed aequationes aſſumtae $y=t+au-b$, et $x=t-u+c$, praebent quoque $t=(y+ax+b-ac):a+1$, et $u=(y-x+b+c):a+1$. Adeoque ex aequatione inuenta $t=ku$, elicietur $(1-k)y=-(a+k)x+ac+bk+(ck-b)$, erunt ergo $P=(a+k):(k-1)$ et $Q=(ac+bk+ck-b):(1-k)$ et aequatio finalis $y=Px+Q$ quae inuenienda erat. Nam ex catalogo praecedenti liquet ſingulas litteras aſſumtas a, b, c, e, f, h, et k atque adeo P et Q datas eſſe in A, B, C, D, E, et F: itaque per theorema noſtrum aequatio propoſita $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$, conceſſis quadraturis, conſtrui poteſt.

Sub hac eadem aequatione continetur quoque iſta $dy=ax^m dx+bx^p y^q dx$ circa quam tum *Nob. Com. Riccatus*, tum

tum *Cl. Cl. Bernoulli* Fratres *Nicolaus* et *Daniel*, multa curioſa et elegantia iam inuenerunt, nemo autem quod ſciam, generaliter eius conſtructionem obtinuit, aut ſaltem dedit. Alia vero occaſione eam exhibebo.

Hac occaſione monendum eſſe duxi, in vtroque meo ſchediasmate de Theoria generali Motuum variatorum, et in praeſenti de Conſtructione Aequationum, praecipua quidem in Conuentibus Societatis ordinariis praelecta fuiſſe, nonnulla vero quoque occaſione ſic ferente recens acceſſiſſe. Hus pertinent Theoremata nonnulla Bernoulliana *quae in Schediasmate illo demonſtrata exhibentur, quae Celeberr. eorum Autor diu poſtquam ſcriptum illud in Conuentu legi, huc miſit, ſed ob materiae affinitatem tamen ea in dicto Schediasmate attingere volui. Sic reuidendo alteram ſchedam de Conſtructione Aequationum differentialium, non abs re iudicaui ſi nonnulla exempla iis quae praelegeram nunc recens adiicerem.*

THEO-

THEOREMATA SELECTA PRO CONSERVATIONE VIRIVM VIVARVM DEMONSTRANDA ET EXPERIMENTIS CONFIRMANDA.

Auct.

Io. Bernoulli,

Excerpta ex Epiſtolis datis ad filium Danielem, 11. *Oct.* *et* 20. *Dec.* (*ſtil. nou.*) 1727.

Theorema I.

VElocitas aquae, per foramen valde paruum in fundo vaſis exilientis tanta eſt, quantam graue acquirit libere cadendo ex altitudine aquae ſupra foramen.

Theorema II. Sit curua data C*b*B, (*fig.* 1.) per quam deſcendat graue B poſt ſe in altum trahens aliud graue minus A ope funiculi ACB trochleam C ambientis. Quaeruntur velocitates ponderum A et B. Sit $CB = x$, $EB = y$, earum differ. $Bn = dx$, $Bo = dy$, $Bb = ds$, altitudo verticalis TV, per quam graue liberum cadens celeritatem acquirit, quam mobile B habet $= t$, erit $t = \frac{ds^2 . \overline{By - Ax}}{Bds^2 + Adx^2}$. Haud difficilius eſt problema, ſi etiam graue A ſuper curua aliqua data moueatur.

Theor. III. Sit tubus cylindricus ACBH (fig. 2.) vtrobique apertus atque inflexus in duo crura BA et CH ad

ad partem horizontalem BC; ſit ſinus anguli ABC$=p$ et ſinus anguli HCB$=q$ exiſtente nimirum ſinu toto $=1$. Sit porro ille tubus aqua plenus vsque ad horizontalem MN, voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plenae. Erunt agitati liquoris in hoc tubo oſcillationes tam maiores quam minores omnes tautochronae atque eiusdem durationis cum oſcillationibus minimis penduli alicuius ſimplicis, cuius longitudo $=\frac{L}{p+q}$.

Coroll. Si anguli ABC et HCB ſunt recti, qui vnicus caſus eſt a Newtono ſolutus, erit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillanti aquae iſochronum eſt, $=\frac{1}{2}L$ vt inuenit Newtonus.

Theorema 4. Chorda muſica datae longitudinis et ponderis tenſa a dato pondere inuenitur facere vibrationes, quemadmodum definit Taylorus in transactionibus Londin.

Theorema 5. Sit iam chorda ALB (fig. 3) craſſitiei et ponderis expers, onerata in medio ponduſculo dato perexiguo L tenſa autem dato pondere P magno; dico numerum vibrationum huius chordae durante vna oſcillatione penduli datae longitudinis D fore $=2\sqrt{(\frac{D\times P}{AB\times L})}$.

Theorema 6. Iisdem poſitis ſit chorda AB (fig. 4.) onerata duobus ponduſculis aequalibus et aequidiſtantibus, cum a ſe inuicem tum ab extremitatibus A et B. Vocetur vnumquodque ponduſculorum $\frac{1}{2}L$, dico fore numerum vibrationum (oſcillante ſemel pendulo dato D) $=\sqrt{(\frac{6D\times P}{AB\times L})}$.

Theorema 7. Si manentibus reliquis, ſint tria penduſcula ſingula $=\frac{1}{3}L$, erit numerus vibrationum chordae $= 2\sqrt{\left(\frac{\overline{6-3\sqrt{2}}\, D\times P}{AB\times L}\right)}$. Si ponduſcula ſint quatuor ſingula $=\frac{1}{4}L$ erit numerus vibrationum, quem vocabo, $N = 2\sqrt{\left(\frac{\overline{5-\sqrt{5}}\times D\times P}{\overline{5+\sqrt{5}}\times\frac{1}{5}AB\times L}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{\overline{25-5\sqrt{5}}\times D\times P}{\overline{5+\sqrt{5}}\times AB\times L}\right)}$. Si fuerint quinque ponduſcula, quorum vnumquodque $=\frac{1}{5}L$, habebitur $N=\sqrt{\left(\frac{\overline{60-30\sqrt{3}}\times D\times P}{AB\times L}\right)}$. Sint tandem ponduſcula ſex, ſingula $=\frac{1}{6}L$, erit $N=\sqrt{\left(\frac{\overline{42xx-126ax+168aa}\times D\times P}{\overline{2xx+ax+aa}\times AB\times L}\right)}$, vbi notandum, per *a* me intelligere numerum quemlibet pro lubitu aſſumtum, atque tum x eſſe radicem huius aequationis $x^3-axx-2aax+a^3=0$. Eadem methodo, quam habeo, progredi poſſum ad determinandos numeros vibrationum pro pluribus ponduſculis quibus chorda oneratа ſupponi poteſt, ſedpergo ad alia.

De grauibus rotando deſcendentibus in plano inclinato vel in curua aliqua vel etiam verticaliter ſuſpenſis ex filis circa axes circumuolutis ſeſe euoluendo, ſequentia habe.

Theor. 8. Sit graue aliquod cuiuscunque figurae BFG, (fig. 5.) cuius centrum grauitatis ſit C, ex quo et radio CA deſcriptus AHL circulus repraeſentet axem, cui circumuolutum intelligatur filum aliquod ſecundum ordinem litterarum EALHALHAL etc. Ipſum vero graue ſua grauitate deſcendere concipiatur, id quod fieri non poteſt niſi rotando, dum nimirum axis ex filo ſeſe euol-

euoluit hoc litterarum ordine AHLAHL. Quaeritur, poſtquam ex altitudine EA quacunque deſcenderit graue, quanta ſit velocitas centri C.

Solutio. Vocetur D diſtantia centri oſcillationis figurae rotantis a puncto ſuſpenſionis, quod vbicunque in circumferentia AHL ſumi poteſt. Sit radius CA $= a$; EA altitudo verticalis, per quam graue rotando deſcendit $=$ R, altitudo quaeſita per quam graue aliquod liberum deſcendere debet, vt acquirat velocitatem aequalem illi quam habet grauis rotantis centrum grauitatis C $= z$; dico fore $z = \frac{aR}{D}$.

Coroll. 1. Si graue BFG eſt circumferentia circuli vel ſuperficies cylindrica, cuius radius CB $= b$, erit $z = aaR : (aa + bb.)$

Coroll. 2. Si vero ſit ipſe circulus vel cylindrus, erit $z = 2aaR : (2aa + bb)$.

Coroll. 3. Si ſit ſuperficies ſphaerica, habebitur $z = 3aaR : (3aa + 2bb)$.

Coroll. 4. Et tandem ſi ſit globus grauis, fiet $z = 5aaR : (5aa + 2bb)$. Notandum, in his omnibus, poni axem AHL grauitatis expertem.

Scholion. Poſſent experimenta inſtitui, vt pateret an centrum C haberet velocitatem, quam hic aſſignauimus, quo ipſo cuilibet manifeſta fieret conſeruatio virium viuarum, cum praeſertim pro lubitu temperare liceat deſcenſum, vt centrum tam lente, quam volumus, deſcendat, adeoque tempus deſcenſus per quamlibet altitu-

titudinem EA commode comparari poſſit cum deſcenſu naturali grauium cadentium, quae nimirum vno ſecundo 15. ped. Reg. Paris. circiter a quiete delabuntur. Vt enim lentiſſime deſcendat, minuenda eſt tantum quantum ſatis ratio CA ad CB. Poſſunt quoque ex principio conſeruationis virium viuarum determinari leges communicationis motus pro corporibus perfecte elaſticis, quae rotando ſe mutuo impellunt, ſed breuitatis gratia eas hic non exprimo, ſufficit monere eas ex parte dependere a figura corporum rotantium. Multa alia nunc taceo, quae commode per theoriam virium viuarum explicari aut ſolui poſſunt, quae vero ex aliis principiis difficulter nec ſine ambagibus determinantur, quibus annumero, quae ſuperius dixi circa vibrationes chordarum et oſcillationes fluidorum in tubis reflexis, nec non ea, quae de grauibus rotando deſcendentibus vel de corporibus rotando in ſe inuicem impingentibus expoſui. Caetera argumentum plane eſt nouum et nulli hactenus quantum ſcio conſideratum. Demonſtrationes alia vice mittam.

Monitum.

„ Experimenta deſiderata in ſcholio Theorematis 8.
„ fuerunt inſtituta accuratiſſime in diuerſis corporibus,
„ eaque plane cum Theoria conuenire obſeruatum fuit.
„ In ſequenti epiſtola ad filium data talia ad hoc argu-
„ mentum pertinentia atque in latinum ſermonem verſa
„ reſcripſit horum theorematum Auctor.

Non dubitaui, quin facile inuenires demonſtrationes

nes theorematum meorum ope principii conſeruationis virium viuarum et gaudeo, te alia eruiſſe ſimilia: gratum quoque fuit ex te intelligere, tam egregie theoriam iſtam experimentis confirmari. Sententiam meam de tenſione fili corpus rotans ſuſtinentis in theoremate octauo, quam ſcire cupis, iam tecum communicabo, ex qua patebit, eſſe tenſionem fili conſtantem durante toto deſcenſu mobilis rotantis, cuiuscunque ſit figurae. Sit IKL (fig. 6.) ſcala velocitatum naturalium, cuius nempe applicatae MK, NL deſignent velocitates acquiſitas mobilis libere cadentis ex altitudinibus IM, IN. Sit alia curua IRS, cuius applicatae PR, QS exprimant velocitates centri grauitatis mobilis alicuius ex filo ſuſpenſi rotando ab initio I deſcendentis per euolutionem fili. Agantur ex punctis infinite propinquis K, L rectae KT, LS axi IQ parallelae ſecantes curuam IRS in R et S; erunt ductis applicatis RP, SQ ex natura velocitatum mobilis rotando deſcendentis (nominatis IP vel IQ$=$R, et IM vel IN$=$Z, PQ$=d$R, MN$=d$Z) Z$=\frac{aR}{D}$ (vid. epiſtolam meam anteriorem), hoc eſt, D. a :: R.Z :: IQ. IN :: IP. IM :: PQ. MN; vnde ob conſtantem rationem inter IQ et IN vel inter IP et IM, patet curuam IRS eſſe etiam parabolam; hinc ob velocitates PR, MK aequales erit tempuſculum per PQ ad tempuſculum per MN vt PQ ad MN, ſeu vt IP ad IM :: R.Z :: D. a. Sumta iam PO $=$MN, ductaque applicatis parallela OV ſecans KR productam in Y et elementum parabolae RS in X; fingamus filum, quando mobile peruenit in P ſubito rumpi, ita

vt acquiſita ſua velocitate PR=MK pergat libere deſcendere, quare in O habebit velocitatem OV=NL, et incrementum velocitatis momentaneum erit YV=ZL. Quia autem non rupto filo, incrementum velocitatis, eodem momento acquiſitum eſt tantum YX, liquet reliquum XV impediri a filo, idemque adeo impendi in tenſionem fili. Vnde ita argumentor: Incrementa et decrementa velocitatis in eodem corpore et eodem tempuſculo producta ſunt vt vires, quae ea producunt; eſt ergo tenſio fili, quae dicatur T, ad vim grauitatis mobilis rotantis, hoc eſt, ad eius pondus, quod vocetur P, vt VX ad VY=ST, adeoque vt SV ad RT vel vt OQ ad PQ h. e. vt PQ–MN ad PQ. Vnde T ad P :: dR–dZ. dR :: R–Z. R :: D–a. D, proinde $T = \frac{D-a}{D} \times P$; Q. E. I.

Coroll. 1. Si mobile graue BFG (vid. fig. 5.) eſt circumferentia circuli vel ſuperficies cylindrica, cuius radius CB=b erit $D = \frac{aa+bb}{a}$, adeoque $T = \frac{bb}{aa+bb} \times P$.

Coroll. 2. Si BFG ſit ipſe circulus vel cylindrus, cuius radius =b, erit $D = \frac{2aa+bb}{2a}$, vnde $T = \frac{bb}{2aa+bb} \times P$.

Coroll. 3. Si ſit ſuperficies ſphaerica, cuius radius =b, erit $D = \frac{3aa+2bb}{3a}$; Hinc $T = \frac{2bb}{3aa+2bb} \times P$.

Coroll. 4. Si ſit globus ſolidus, cuius radius =b, erit $D = \frac{5aa+2bb}{5a}$, proinde $T = \frac{2bb}{5aa+2bb} \times P$.

Corollar. 5. Sit iam mobile graue BFG (fig. 7.) non rotundum, ſed ex. gr. triangulum iſoſceles rectangulum in G, recta perpendicularis ex G in hypotenuſam demis-

miſſa $=c$. CA radius circuli AHL (qui repraeſentat axem, cui filum circumuolutum eſt, et qui pro centro habet centrum grauitatis trianguli BFG) $=a$: Erit D $=\frac{2cc+9aa}{9a}$; ideoque T $=\frac{2cc}{2cc+9aa}\times P$, ſumendo hic etiam P pro pondere trianguli. Atque ita in aliis.

Scholion. Haec Corollaria tanquam totidem theoremata non parum curioſitatis habent, ſiquidem facillimum eſt ea per experientiam confirmare; appendatur ex. gr. praedictum triangulum quod rotando deſcendere debet ad extremitatem vnius brachii librae et ad alteram eius extremitatem alligetur pondus $=\frac{2cc}{2cc+9aa}\times P$. Dico enim pondus hoc minus in aequilibrio ſeruaturum pondus maius trianguli P, quamdiu hoc rotando deſcendit. Vel etiam hunc in modum inſtitui poſſet experimentum: ſint duae trochleae in centris ſuis parieti infixae, quas ambiat filum QMNA axi ALH inuolutum, ſitque huius axis centrum C in centro grauitatis trianguli iſoſcelis BFG rectanguli in G, cuius pondus $=$P; ad alteram fili extremitatem Q appendatur pondus S $=\frac{2cc}{2cc+9aa}\times P$. Dico pondus S in quiete manſurum, dum triangulum BFG per euolutionem fili rotando deſcendit.

Dan.

Dan. Bernoulli I. F.

DE MVTVA RELATIONE CENTRI VIRIVM, CENTRI OSCILLATIONIS ET CENTRI GRAVITATIS

Demonſtrationes Geometricae.

I.

M. Nov. 1726.

CVm perlegerem theoremata Paterna ex principio conſeruationis virium viuarum deducta, haud difficulter vidi, omnia illa, quae circa motum corporum rotantium verſantur, pendere a debita centri virium determinatione. Intelligo autem per centrum virium punctum tale, in quo ſi tota maſſa concipiatur vnita, eadem ex motu ipſius oriatur virium viuarum quantitas, quae corpori moto ineſt.

II. *Theorema generale.* Diſtantia centri virium a puncto ſiue axe ſuſpenſionis aequalis eſt mediae proportionali inter diſtantias centri grauitatis et centri oſcillationis ab eodem puncto ſeu axe.

Demonſtratio. Sint duo corpora M et N (Fig. 8.) quorum centrum grauitatis ſit in B: Rotentur corpora circa punctum fixum A; dicatur maſſa corporis M=M maſſa alterius corporis =N, diſtantia prioris a puncto A=a, diſtantia alterius corporis ab eodem puncto =b; AB=C et erit AD ſeu diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $=\frac{aaM+bbN}{Mc+Nc}$. Sit iam centrum virium

in

in C, dicatur AC $=x$, concipiaturque corpora ita rotari, vt velocitas centri grauitatis ſit $=v$; et erit velocitas corporis M$=\frac{av}{c}$, velocitas corporis N$=\frac{bv}{c}$ et velocitas centri virium $=\frac{xv}{c}$; vis viua autem corporis M erit $\frac{aavvM}{cc}$, vis viua alterius corporis $=\frac{bbvvN}{cc}$, et ſi vtrumque corpus haberet maſſam ſuam concentratam in puncto C eſſet ipſius vis viua $=\frac{xxvv\times(M+N}{cc}$; vnde habetur talis aequatio $\frac{aavvM}{cc}+\frac{bbvvN}{cc}=\frac{xxvv\times(M+N)}{cc}$; ſeu $x=\sqrt{(\frac{aaM+bbN}{M+N})}=\sqrt{(\frac{aaM+bbN}{Mc+Nc}\times c)}$ id eſt $=$ radici ex producto diſtantiae centri oſcillationis in diſtantiam centri grauitatis. Patet porro poſſe corpora quotcunque conſiderari ſiue in eodem plano ſiue in planis diuerſis, adeo vt theorema generale ſit.

II. *Corollarium.* Si circulus cuius radius $=1$ ex puncto in peripheria ſumto ſuſpendatur, erit diſtantia centri virium a puncto ſuſpenſionis $=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Si iisdem conditionibus peripheria circuli ſuſpendatur, fiet diſtantia illa $=\sqrt{2}$; ſi ſphaera, fiet $=\sqrt{\frac{7}{5}}$, ſi ex alio puncto figurae ſiue corpora ſuſpendantur, aliud habebitur centrum virium; quaeritur autem vbinam ſit hoc centrum futurum, ſi axis ſuſpenſionis tranſeat per centrum grauitatis; regula generalis oſtendit eſſe diſtantiam centri virium aequalem mediae proportionali inter nihilum et infinitum; ex quo cum nihil cognoſci poſſit, hic caſus ſpecialiter tentandus eſt; ſolutionem illius dabo in ſequentibus.

III. *Scholion.* Triangulum AMN conſideratur vt rigidum, grauitatis expers et duobus ponderibus *M* et

N oneratum: his autem poſitis manifeſtum eſt, pondera non aliter moueri, ac ſi ſola virga MN rigida eſſet, oſcillareturq; punctum B circa punctum A, dum interea rotatur motu angulari ſimili et contrario virga MN circa punctum B: et cum motus angularis ſimilis ſit, erit MB ad BA, ſicuti velocitas, qua corpus M rotatur circa punctum B ad velocitatem, qua punctum B fertur circa A: data itaque relatione quae eſt inter velocitates, determinare licebit rationem diſtantiae corporis a centro grauitatis ad diſtantiam centri grauitatis a puncto ſuſpenſionis.

Lemma. Si corpora M et N circa centrum grauitatis B rotentur velocitate vniformi quacunque, ſimulque ipſum centrum B feratur alio motu cuiuscunque velocitatis vniformis, dico vim viuam ex toto motu reſultantem in omni ſitu eſſe eandem et aequalem illi, quae prodit, ſi vterque motus ſingulatim conſideretur.

Demonſtratio. Sint (fig. 9.) duo corpora in M et N, quorum centrum grauitatis eſt in B, circa quod rotentur, ita vt corpus M deſcribat circulum MGO et corpus N alium concentricum NHS moueaturque ſimul punctum B ſecundum directionem lineae BK, quam ſuppono eandem habere rationem ad BM, quae eſt inter velocitatem puncti B et velocitatem qua corpus M rotatur circa punctum B, vnde BM et BN repraeſentabunt velocitates corporum M et N ratione motus rotatorii et BK exprimet velocitatem puncti B ratione alterius motus; et ipſa corpora M et N exprimentur per lineas BN et BM, quia maſſae reci-

pro-

proce proportionales ſunt velocitatibus. His ita diſpoſitis, ſint corpora in ſitu M et N quocunque: ſitque GH perpendicularis ad MN; factis parallelogrammis BGLK et BHIK, ductisque diagonalibus BL et BI, patet has ipſas diagonales exprimere poſſe velocitates corporum M et N ex vtroque motu reſultantes; hincque vim viuam corporis M exprimendam eſſe per $BL^2 \times BN$ ſeu $BL^2 \times BH$ et vim viuam alterius corporis per $BI^2 \times BM$ ſeu $BI^2 \times BG$: vnde demonſtrandum reſtat eſſe $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG$ conſtantis magnitudinis. Per centrum B ducatur QR perpendicularis ad HI et ad productam GL, ſic erit $BL^2 = BG^2 + BK^2 + 2GR \times BK$, atque $BI^2 = BH^2 + BK^2 - 2HQ \times BK$, vnde $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG = (BG^2 \times BH + BK^2 \times BH + 2GR \times BK \times BH) + (BH^2 \times BG + BK^2 \times BG - 2HQ \times BK \times BG)$. Sunt autem in quantitatibus parentheſibus incluſis duo vltimi termini aequales, quia $GR \times BH = HQ \times BG$; eſt itaque ſumma virium viuarum ex motu compoſito oriunda $= (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$; et conſequenter in omni ſitu eadem; quod erat primo loco demonſtrandum. Nunc ſi vterque motus ſingulatim conſideretur, habetur vis viua motus rotatorii pro corpore $M = BG^2 \times BH$ et pro corpore $N = BH^2 \times BG$ et denique vis viua alterius motus $= BK^2 \times (BH + BG)$, ergo ſumma virium viuarum ex vtroque motu ſed non compoſito oriunda $= BG^2 \times BH + BH^2 \times BG + BK^2 \times (BH + BG) = (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$, ergo eadem quae ante: quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

V. *Corollarium.* Sequitur ex hoc lemmate et ex ſcholio §. 3. poſſe corpora M et N conſiderari tanquam oſcillantia circa punctum K ita vt angulus KBN conſtans ſit: vnde ſi ponatur corporum ita oſcillantium centrum oſcillationis eſſe in U, erit T (facta KT media proportionali inter KB et KU) centrum virium, et proinde tanta erit ſumma virium viuarum, quanta foret, ſi ambo corpora eſſent in puncto T concentrata oſcillarenturque circa punctum K velocitate tali, vt punctum B priſtinam ſuam velocitatem conſeruet.

VI. *Problema.* Determinare centrum virium in corporibus circa centrum grauitatis rotatis.

Solutio. Sint corpora in M et N rotata circa centrum grauitatis B: Concipiatur centro grauitatis alium motum imprimi, cuius velocitas ſit ad velocitatem, qua corpus M rotatur ſicuti BK ad BM: ergo (per praeced. lemma et coroll.) erit vis viua totius motus eadem ac ſi corpora concentrata in T mouerentur circa punctum K velocitate quae eſt vt KT; ergo vis viua totius motus erit vt KT^2 ſeu vt $KB \times KU$, a qua ſi auferatur vis viua (quae orta fuit ex motu concepto, quaſi impreſſus fuiſſet puncto B, quaeque eſt vt KB^2) remanet vis viua corporum rotatorum, quae proin erit vt $KB \times KU - KB^2 = KB \times BU$: ergo velocitas centri virium debet eſſe vt $\sqrt{KB \times BU}$; adeoque diſtantia centri virium a centro ſuſpenſionis ſeu centro grauitatis erit $= \sqrt{KB \times BU}$. Vnde talis oritur regula; aſſumatur arbitraria quaecunque KB, conſidereturque punctum K vt punctum ſuſpenſionis

ſionis, erit media proportionalis inter aſſumtam et diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis aequalis diſtantiae centri virium a centro grauitatis. Q. E. F.

VII. *Scholion.* Patet iterum demonſtrationem procedere, quotcunque fuerint maſſae M, N, ſiue ſint in eodem plano et ſuperficiem efforment, ſiue in diuerſis planis et corpus conſtituant; ſi itaque circulus e centro ſuo ſuſpendatur, erit diſtantia centri virium a centro, poſita vnitate pro radio $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; ſi peripheria circuli, fit $= 1$, et ſi ſphaera ſumatur, fit $= \sqrt{\frac{2}{5}}$.

VIII. *Coroll.* 1. Cum KB ſit arbitraria, et tamen quantitas haec $\sqrt{KB \times BU}$ vel etiam eiusdem quadratum $KB \times BU$ ſit conſtans, ſtatim apparet propoſitio quam Cel. Hugenius horologio ſuo oſcill. inſeruit p. 125. prop. 19. his verbis: „ Si magnitudo eadem nunc breuius nunc lon-„ gius ſuſpenſa agitetur; erunt, ſicut diſtantiae axium oſ-„ cillationis a centro grauitatis inter ſe, ita contraria ra-„ tione diſtantiae centrorum oſcillationis ab eodem gra-„ uitatis centro. Eadem facilitate ex theoria noſtra deducitur eiusdem propoſitio 16. p 119. quae talis eſt „figura quaeuis ſiue linea fuerit, ſiue ſuperficies, ſiue ſo-„ lidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur agiteturque„ ſuper axibus inter ſe parallelis, quique a centro graui-„ tatis figurae aequaliter diſtent, ſibi ipſi iſochronae eſt„ Cum enim in hac propoſitione poſtuletur, vt KB ſit conſtantis magnitudinis, erit quoque BU conſtans et conſeqnenter etiam $KB + BU$. Sequitur quoque hinc theorema non inelegans, quod in ſequenti propoſitione complectar.

IX. *Theorema.* Corpus quodcunque ſi e centro virium §. 6. determinato ſuſpenſum agitetur brachiſtochronum eſt, id eſt, oſcillationes facit minoris durationis, quam ſi ex quocunque alio puncto ſuſpendatur; et erit tunc ſemper diſtantia centri oſcillationis a centro grauitatis aequalis diſtantiae centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis.

Demonſtratio. Sit punctum A (fig. 8.) punctum ſuſpenſionis; B centrum grauitatis; D centrum oſcillationis; ſit $AB = x$, $BD = y$; et erit longitudo penduli iſochroni $x + y$, quae cum ſit minima, erit $dx = -dy$; ſed xy eſt $=$ conſtanti (per §. 8.) ergo $xdy = ydx$, quae duae aequationes combinatae dant $x = y$; vnde iam patet ſecunda pars propoſitionis. Porro centri virium §. 6. definiti diſtantia a centro ſuſpenſionis eſt $= \sqrt{xy} = x$; ergo AB debet eidem diſtantiae eſſe aequalis; vnde iam quoque prior pars propoſitionis manifeſta eſt. Q.E.D.

X. Quae hactenus dicta ſunt, inſeruient ad recte intelligendum motum corporum, quorum partes ſitum parallelum non ſeruant; ſic motus pendulorum, corporum gyratorum, rotando progredientium etc. inde deduci poteſt et ſaepe aliter fere non poteſt.

XI. Placet hic adiicere theorema ſimile illi, quod inter theoremata Patris octauum eſt, et in cuius gratiam problema §. 6. praemiſi, ope cuius facile demonſtratur; ſit graue aliquod cuiuscunque figurae (fig. 10.) CBA, cuius centrum grauitatis ſit in D, ex quo et radio DM deſcriptus intelligatur circulus MNP, cui filum circumuolutum eſt PMNPMN etc. cuius fili extremitati appenſum ſit pondus

Q,

Q, quod deſcenſu ſuo graue CBA in gyrum agit circa centrum grauitatis D, dico velocitatem corporis Q ſequentem in modum determinare poſſe. Sit MD$=a$; conſideretur corpus ſuſpenſum ex puncto M oſcillari, eſſeque centrum oſcillationis in O, ſitque DO$=b$; pondus grauis totius CBA$=$P; pondus corporis appenſi $=p$, altitudo ex qua corpus Q delapſum eſt$=$R; altitudo quaeſita per quam graue aliquod libere cadendo acquirere poſſit velocitatem corporis Q$=z$; dico fore $z=\frac{apR}{ap+bP}$ et ſi tempus quo corpus naturaliter cadit per altitudinem R dicatur t, erit tempus inſumtum a corpore Q$=t\frac{\sqrt{ap+bP}}{\sqrt{ap}}$, id quod experientiae conforme eſſe plurimis inſtitutis experimentis ſemper inueni.

XII. *Scholium.* Liquet ex determinatione praecedente velocitatis corporis Q, haud ſecus illud deſcendere dum corpus ABC circumagit, ac ſi libere caderet in fluido cuius grauitas ſpecifica eſſet ad grauitatem ſpecificam ponderis Q ut bP ad $ap+b$P. Sed manifeſtum eſt, tantum tendi filum NQ inter deſcenſum corporis Q, quantum hoc corpus ſuſtinetur a fluido ſi in fluido moueri ponatur : eſt autem vis, qua ſuſtinetur a fluido, $=\frac{bPp}{ap+bP}$, ergo et tenſio fili $=\frac{bPp}{ap+bP}$: ſi $a=0$, fit illa tenſio $=p$. Eodem modo inuenitur tenſio fili EA (fig 5.) in theoremate 8. Patris pag. 203. (vocando P pondus corporis rotati BTG et retinendo

cae-

caeteras denominationes a Patre adhibitas) $= \frac{D-a}{D} \times P$. Idem quoque et quidem directe, inuenit Pater, vti poſtmodum ex ipſius litteris ad me datis intellexi. vid. pag. 206.

DE LINEIS CVRVIS, QVAE EVOLVTAE IPSAE SE GENERANT

Auctore

G. W. Krafft.

M. Dec. 1727.

CVruae, quae euolutae ipſae ſe generant, non vno die in lucem protractae ſunt; ſed originem ſuam diuerſo tempori et diuerſorum ſagacitati debent quaelibet tamen earum NobilemInuentorem nacta eſt. Prima quidem Cyclois vulgaris a Chr. Hugenio talis deprehenſa fuit, a qua deinde mox non exigua vtilitas ad temporis momenta accuratius diſtinguenda permanauit. Cum vero dubitaretur pluresne vna poſſibiles ſint huius indolis, nec ne: non longe poſt TſchirnhuſiusCauſticis fortaſſe ſuis probe intentus ſecundam inuenit, Cauſticam nempe ſemicirculi quae Epicyclois eſt, quam protulit deinde in Actis Lipſ. 1682. M. Nouembri. Tertia denique Logarithmica Spiralis, Iacobo Bernoullio ob mirabilis huius proprietatis inuentionem inſignis laetitiae argumentum praebuit, vti apparet ex iisdem Actis 1692 M. Maio. Cum vero non meminerim, vllibi publice exſtare talem methodum

dum, quae Problema hoc, difficile tamen Leibnitio dictum in Commercio Epiſt. p. 92, ita excutiat, vt per eam ſingulae ſupra dictarum eruantur, probeturque plures in poſterum inueniri non poſſe; quanquam priuatim praeclaros huius rei modos cognitos eſſe non dubitem; quorum vnum, a ſequenti quidem diuerſum, apud Celeberr. Iac. Hermannum videre licuit, Quem non ſine grata recordatione auctae ſcientiae qualiscunque meae nomino; exiſtimaui non abs re futurum eſſe, ſi, quid in hoc Problemate non plane iniucundo proficere mihi contigerit, hic commemorem.

Problema I. Inuenire curuam AFB Fig. I. eius naturae, vt I. Flexum contrarium non habeat; 2. Si ducatur radius oſculi quilibet DE, capiaturque a termino quodam fixo B arcus BF in ratione quacunque data ad hunc radium DE, demittantur deinde ex punctis F et D perpendiculares DC, FI, ad rectam GH quamcunque, poſitione datam: Anguli CDM, ILF, aut anguli CDM, IFL, comprehenſi radiis oſculi DE, FK, atque rectis DC, IL, FI, ſemper habeant differentiam datam.

Reſolutio. Quoniam duplex caſus Problemate continetur, ſit I. angulorum CDM et ILF differentia conſtans, quaeritur natura curuae AFB. Ponantur in hunc finem radii dE, fK, prioribus infinite propinqui, cum ſuis perpendicularibus dc, fi, voceturque radius DE, r, alter vero FK, R; et ratio data ſit $a:b$. Erit itaque, DE (r): BF$=a:b$, hoc eſt, BF$=\frac{br}{a}$, et F$f=\frac{bdr}{a}$. Cum vero

radius FK eandem naturam habere debeat, quam habet alter DE; erit quoque FK (R) : $BD = a : b$, vnde $BD = \frac{bR}{a}$ et $Dd = -\frac{bdR}{a}$, vbi ſignum priuatiuum ponitur, quia creſcente arcu BF, alter BD decreſcit. Quoniam porro differentia angulorum u et x conſtans eſſe debet, erit $u-x =$ angulo conſtanti, adeoque $du-dx = o$ et $du = dx$, hoc eſt, incrementa aut decrementa angulorum in ſitu infinite propinquo, ſunt aequalia; quapropter ob angulum externum $x = y + E$, erit $x - y = E$; et pariter, ob $u = t + K$, $u - t = K$, hoc eſt, incrementa angulorum CDM et ILF ſunt anguli ad E et K, qui ob aequalitatem ſuam efficiunt ſectores EDd, KFf ſimiles, quapropter erit DE (r): D$d(-\frac{bdR}{a}) =$ FK(R) : F$f(\frac{bdr}{a})$ hoc eſt $-RdR = rdr$, et Integrando habebitur $C^2 - R^2 = r^2$, adiecta conſtanti C ne Problema ob $\sqrt{-R^2} = r$ imaginarium fiat, vnde emergit $\sqrt{CC-RR} = r$, et $\frac{br}{a} = BF = \frac{b\sqrt{CC-RR}}{a}$. Ob vtrumque autem radium oſculi ſemper eodem ſigno affirmatiuo acceptum, verſus eandem partem illi ſemper reſpicient, adeoque curua flexum contrarium non admittet.

2. Sit iam angulorum CDM et IFL differentia conſtans, quaeritur natura curuae AFB. Manifeſtum eſt, quod rurſus vt ante, ob $n = m + K$, ſit $n - m = K$, adeoque ob decrementa angulorum CDM et IFL in ſitu infinite propinquo, aequalia, iterum ſectores EDd, KFf ſimiles habentur. Oritur itaq; denuo, DE(r): D$d(-\frac{bdR}{a}) =$ FK(R): F$f(\frac{bdr}{a})$, atque $-RdR = rdr$, vel integrando $\sqrt{CC-RR} = r$

et

et $\frac{br}{a}$=BF=$\frac{b\sqrt{CC-RR}}{a}$. Cum igitur in vtroque caſu idem valor arcus BF emergat, patet vnam eandemque curuam vtrique caſui ſatisfacere.

Corollarium I. Vt vero conſtruatur arcus inuentus BF, ponatur conſtans C=$\frac{\overline{2a+k}\times k}{b}$, in quo valore noua conſtans indeterminata k aſſumitur; et radius oſculi R=$\frac{\overline{2a+k}\times u}{b}$, cui valori iam noua variabilis u ineſt, habebitur BF=$\frac{\overline{2a+k}.\sqrt{(k^2-u^2)}}{a}$, quem dico eſſe arcum Epicycloidis Fig. 2. in qua radius circuli immobilis OB=a, diameter circuli mobilis AB=k. Sit enim chorda quaeuis BE=u, radio OE, centro O, deſcriptus arcus circuli EM, et MC conueniens radius oſculi: Erit ex natura Epicycloidis (§. 101. Analyſ. Infinitor.) arcus AM ad chordam AE ($\sqrt{kk-uu}$), vti eſt ſumma diametrorum $2a+k$ ad radium baſeos OB (a), itaque AM= $\frac{\overline{2a+k}\times\sqrt{(k^2-u^2)}}{a}$=BF. Fig. I. Ob aſſumtum vero R= $\frac{\overline{2a+k}\times u}{b}$, elicitur b=$\frac{\overline{2a+k}\times u}{R}$; in Epicycloide autem eſt, OA : OB=MG : GC, ergo inuertendo et componendo OB+OA : OA=GC+MG : MG hoc eſt: $2a+k$: OA=R : MG (u), ob MG=EB, per §. 100. l. c. n. 3. ergo OA=$\frac{\overline{2a+k}\times u}{R}$=$b$. Vnde patet, rationem datam problematis $a:b$, eſſe ipſius OB ad OA.

Corollarium 2. Quodſi ratio data $a:b$ ſit aequalitatis, habebitur BF=$\sqrt{CC-RR}$, et ſi ſtatuatur C=$2e$, R=$2u$, erit BF=$2\sqrt{ee-uu}$, qui eſt arcus Cycloidis ordina-

dinariae, in qua diameter circuli mobilis $=e$. Sit enim Fig. 3. Cyclois BDE, atque in ea AB$=e$, chorda quaelibet AC $=u$, erit arcus BD $=$ duplo chordae BC $=$ $2\sqrt{(e^2-u^2)}$=BF. Fig. 1. Sunt igitur curuarum quaeſitarum duae, nempe Epicyclois, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem, et Cyclois ordinaria; quarum vtrique vterque Problematis caſus reſpondet. Q. E. I. Cum vero hae proprietates vtriusque Cycloidis animaduerſae hactenus fortaſſe non ſint: ex ipſa harum curuarum natura eas adhuc deducere conabor.

Theorema 1. Sit Fig. 4. Cyclois ordinaria BFMA, ducatur in ea radius oſculi quicunque MC, capiaturque huic aequalis arcus BF, et ducantur applicatae MP, FI, ad axem AD perpendiculares, cum normali ad curuam FG: Erunt triangula PMH, IFG, ſimilia, ita vt angulus IFG aequalis angulo PHM.

Demonſtratio. Ad diametrum circuli generatoris BD ducantur perpendiculares FR et MS, quae ſecabunt circulum in T et V. Sint igitur chordae per puncta interſectionum ductae BT, BV, TD, VD; atque erit per naturam Cycloidis radius oſculi MC=2 chordae VD, et arcus BF=2 chordae BT, hinc ob BF= MC per hyp. erit 2VD=2BT, hoc eſt, chordae VD, BT erunt aequales, vnde triangula DTB et DVB ſimilia et aequalia ſunt. Ob parallelas autem FG et TD, MH et VD, per naturam Cycloidis, triangula IFG et DTB, PMH et DVB ſunt ſimilia; igitur etiam ipſa PMH et IFG triangula ita ſunt ſimilia, vt angulus PHM=GDV=VBD=TDB=IFG. Q. E. D.

Co-

Corollarium. Sit iam recta YD poſitione data, ſub angulo quocunque ADY cum axe AD; prolongentur normales ad curuam in E et N, et demittantur perpendiculares MK, FL. Erit $d-a=e$, et per Theor. 1. $f+g=e$, hinc $d-a=f+g$, et $d-a-f=g$. porro $b+g=c+d$, et $b-c=d-g=d-d+a+f=a+f$. Ob triangula autem FIO, OLD ſimilia, eſt f=angulo conſtanti a, hinc $b-c=2a$, hoc eſt, differentia angulorum b et c ſubcontrarie poſitorum eſt conſtans. Eſt autem porro $b=90-g$, ergo ob $b-c=2a$, erit $90-g-c=2a$, et $-g-c=2a-90$ vbi angulus g ſignum priuatiuum accipit, quia in alteram partem radii FG cadit; igitur differentia quoque angulorum g et c directe poſitorum eſt conſtans. Quamobrem manifeſtum eſt, quod in Cycloide ordinaria ſemper duci poſſit recta aliqua YD, in quam demiſſae perpendiculares MK, FL, efficiant modo aequalitatem, modo differentiam conſtantem, angulorum ſubcontrarie aeque ac directe poſitorum, ſicut calculi effatum id iubet.

Theorema 2. Sit iam Epicyclois A*m*MD genita ex reuolutione circuli mobilis A*e*EB ſupra immobilem BGD*d*, cum radio oſculi MC producto in L, atque arcu A*m* ad radium oſculi MC in ratione conſtanti ipſius OB ad OA. Sit deinde puncti *m* normalis *m*N, et applicata *mp*, nec non puncti M applicata MP: Dico, differentiam angulorum *pm*N et PML eſſe in quolibet Epicycloidis puncto conſtantem, nempe aequalem angulo *d*OD; ſi ſcilicet BD*d* ſit circuli quadrans.

Demonſtratio. 1. Centro O, radiis OM, O*m* de-

ſcribantur arcus circulares ME, me, et ducantur chordae BE, Ae, cum radiis KE, Ke, vocenturque OB, b KA, a. Atque erit per naturam Epicycloidis $MG : GC = 2a + b : b$, et $GC = \frac{b}{2a+b} MG, = \frac{b}{2a+b} BE$, ob $BE = MG$, igitur $MC = MG + GC = BE + GC = \frac{2a+2b}{2a+b} BE$. Per hypotheſin eſt $MC : Am = OB : OA = b : 2a + b$, ergo erit $Am = \frac{2a+b}{b} MC = \frac{2a+2b}{b} BE$. porro per naturam curuae habetur $Am : Ae = 2a + 2b : b$, vnde $Am = \frac{2a+2b}{b} Ae$. Erit itaque $\frac{2a+2b}{b} BE = \frac{2a+2b}{b} Ae$, hoc eſt, chordae BE et Ae erunt aequales.

2. E centro circuli mobilis R ducatur in contactum G recta RG, atque e centro F in contactum H recta FH, quae productae concurrent in centro O. Et quoniam arcus circulares ſunt in ratione compoſita angulorum et radiorum; erit $Hn : HB = HFn \times a : HOB \times b$, inde ob $Hn = HB$ deducitur $HOB = \frac{a}{b} HFn$.

3. Eſt itaque angulus $mNP = HOB + OHN = HOB + mHF = HOB + \frac{1}{2} HFn = \frac{a}{b} HFn + \frac{1}{2} HFn = \frac{2a+b}{2b} HFn$. Quoniam autem chordae mH, eB aequales ſunt, ex natura Epicycloidis, erit quoque $Hn = Ae = EB$. dem. n. 1. et $HFn = EKB$; igitur $mNp = \frac{2a+b}{2b} HFn = \frac{2a+b}{2b} EKB$, atque ob rectum in p, angulus $pmN = 90 - mNp = 90 - \frac{2a+b}{2b} EKB$.

4 Pari modo angulus $PML = MGR - MQG = EBK - MQG = EBK - dOG = EBK - DOG - dOD$; ſed ob

ob arcum MG=DG, angulus DOG$=\frac{a}{b}$ MRG$=\frac{a}{b}$EKB; Ergo PML=EBK$-\frac{a}{b}$EKB-dOD=EBK$+\frac{b}{2b}$EKB$-\frac{b}{2b}$ EKB$-\frac{a}{b}$ EKB$-d$OD=EBK$+\frac{1}{2}$EKB$-\frac{2a+b}{2b}$EKB$-d$OD=90°$-\frac{2a+b}{2b}$EKB$-d$OD.

5. Ergo tandem elicitur pmN$-$PML$=90-\frac{2a+b}{2b}$ EKB$-90+\frac{2a+b}{2b}$EKB$+d$OD; hoc eſt, pmN$-$PML= angulo conſtanti dOD. Q. E. D.

Corollarium 1. Quoniam DB : BEA=DOB$\times b$: 180$\times a$; erit ob DB=BEA, DOB$=\frac{a}{b}$180; et angulus DOd=90$-$DOB=90$-\frac{a}{b}$180. Sit iam differentia data angulorum nulla, vt triangula pmN, PML fiant ſimilia, erit 90$=\frac{a}{b}$180, aut $b=2a$ hoc eſt, OB=BA, qui eſt caſus ſimpliciſſimus, vbi nempe Epicyclois terminatur in fine quadrantis d.

Corollarium 2. Poterit vero in qualibet Epicycloide obtineri, vt ſub iisdem conditionibus Theorematis, anguli intra radios oſculi et perpendiculares ad rectam aliquam poſitione datam demiſſas, ſint aequales, conſequenter triangula illorum angulorum ſimilia. Ducatur enim Fig. 6. recta AN, ſub quouis angulo NAO, atque ad eam perpendiculares demittantur MS, mQ, erit per Theorema 2, $e+f-c=k$, et ob triangula MSR, RAP ſimilia, $h=f=d$. igitur $e-c=k-h$, et $e-c-d=$ angulo conſtanti $k-2h$. Itaque ſi ponatur $h=\frac{1}{2}k$, erit $e-c-d=o$, et $e=c+d$.

Por-

Porro habetur $e = 90 - x$, itaque ob $e - c - d = k - 2h$, erit $90 - x - c - d = k - 2h$, et $-x - c - d = k - 2h - 90$. Vbi x iterum ſigno priuatiuo afficitur, quia in alterum latus radii oſculi cadit. Adeoque apparet, quod etiam inEpicycloide quauis ſemper duci poſſit recta aliqua AN, in quam demiſſae perpendiculares MS, mQ efficiant modo aequalitatem, modo differentiam conſtantem, angulorum ſubcontrarie aeque ac directe poſitorum.

Theorema 3. Sit Fig. 7. curua AFB talis, vt 1. flexum contrarium non habeat; 2. ducto pro lubitu radio oſculi DE, ſumptoque arcu BF a puncto quodam fixo B in ratione quacunque conſtanti ad radium DE triangula DGP, FHI, comprehenſa normalibus ad curuam FI, DP, atque perpendicularibus FH, DG, ad rectam SC poſitione datam, ſint ſimilia: dico, curuam hanc generari euolutione alterius ſimilis ipſi curuae AFB, ſed ſitu inuerſo poſitae. Et ſi curua AFB euolutam ſibi ſimilem habeat ſitu inuerſo poſitam: habere ipſam quoque praedictam proprietatem.

Demonſtratio. Quoniam enim curua AFB flexum contrarium non habet, adeoque verſus eandem partem concaua eſt: admittet euolutam, quae conuexitatem continuo obuertat puncto C, et quae, vti prior, concauitatem habeat continuam. Cum autem nulla pars curuae libera ſit a proprietate aſſignata: opus eſt, vt radius oſculi ab initio in A nullus ſit, conſequenter euoluta ipſius AFB principium ſuum capiat ab A. Sit igitur haec euoluta AEK, tacta a radio oſculi in E Ducatur KL ipſi SC parallela, ſitque normalis EN, atque ad rectam

KL

KL demiſſa perpendicularis EM, producta in *h*. Et erit ob rectum DEN, angulus $u = y = z$, adeoque triangula DGP et ENM ſimilia. Sed per hyp. triangulum DGP ſimile eſt ipſi HFI, igitur HFI et ENM triangula ſunt ſimilia; vtrique autem horum ſimile eſt triangulum curuae infinite paruum *f*FQ et E*e*R, ergo et haec ſimilia ſunt. Denique ob DE = AE, arcus AE, BF, ſunt in ratione conſtanti, per hyp. ergo etiam hypothenuſae triangulorum F*f* et E*e* in eadem ratione ſunt. Idem demonſtrari poteſt de triangulo infinite paruo proxime ſequenti vtriusque curuae, nec non de reliquis omnibus, continua ſerie procedentibus. Conſtabit ergo vtraque harum curuarum ex hypothenuſis conſtanti ratione ſeſe reſpicientibus, triangulorum reſpectiue ſimilium, et continua ſerie progredientium; igitur curuae erunt ſimiles, ita, vt pars euolutae A, reſpondeat parti genitae B, hoc eſt, habebunt ſitum inuerſum. Quod erat primum.

Sit iam euoluta AEK ſimilis genitae AFB, ſed ſitu inuerſo poſita: Erit itaque arcuum aliquis a B computatorum ſimilis arcui AE. Sit ille arcus BF; erit itaque triangulum HFI ſimile ipſi ENM. Sed huic ſimile eſt triangulum GDP, per independenter ab his demonſtr. et arcus AE = radio DE; igitur triangula HFI, et GDP ſunt ſimilia, ſub hac conditione, vt radius DE (= arcui AE) ſit in ratione eadem ad arcum BF, in qua eſt arcus AE ad ſimilem arcum eundem BF, hoc eſt, in ratione conſtanti. Q.E.D.

Corollarium. Cum igitur per Problema 1. proprietas haec, ad curuas, quae euolutae ipſae ſe inuerſo ſitu generant, requiſita, nullis competat, niſi Cycloidi ordinariae, et Epicycloidi: patet, has ſolas eſſe, quae euolutas ſuas habeant ſibi ſimiles, aut aequales, ſitu inuerſo poſitas, nec praeter has dari poſſe alias.

Problema 2. Inuenire curuam, quae euoluta ipſa ſe generet, ita quidem, vt immediate arcus geniti et euoluti ſemper ſint aequales, aut ſimiles.

Reſolutio. Sit Fig. 8. curua AGB talis, vt genitam ſuam AC habeat aequalem et ſimilem. Quoniam curuae AC axis AD perpendicularis eſſe debet ad elementum primum curuae ex euolutione genitae AC, elementum autem hocce primum coincidit cum elemento rectae AM, euidens eſt, axem AD etiam ad rectam MAP hoc eſt ad axem euolutae perpendicularem eſſe debere Conſtituant igitur axes AD, AE, angulum DAE rectum, et ducatur radius oſculi FG; congruet igitur arcus genitus AF aut ipſi AG, aut cadet ſupra G in H, aut infra G in I. Cadat primo in H, ita vt arcus aequales et ſimiles ſint AF et AH, ſitque in H radius oſculi HK, contingens euolutam curuae AB, quae eadem erit cum vtraque priorum, in K; producantur KH in L, GF in M, et ſint applicatae GN, KO. Quoniam igitur AF = AH, in curuis iisdem; erit puncti F radius oſculi aequalis radio oſculi in H, adeoque FG = HK; eſt autem FG = arcui AG,

AG, et HK$=$arcui AK, ergo arcus AG et AK ſunt aequales et ſimiles, vnde angulus OLK$=$NMG. Triangula ALP et MPQ habent angulum MPQ communem, et angulus M$=$L per demonſtr. ergo tertius tertio aequalis, hoc eſt, ob rectum in A, per hyp. erit etiam ad Q vtrinque rectus. Ducatur puncti H tangens HR, ſecabit ea radium FG alicubi, ex. gr. in S; quia, niſi curua AIB habeat alicubi flexum contrarium, quem vero caſum excludo, elementum curuae in H cum nullo alio parallelum eſſe poteſt. Verum ita angulus KHR, et conſequenter LHR erit rectus; ergo in triangulo HSQ ſunt duo recti ad baſin HQ, quod eſt abſurdum. Idem facile euincitur, in caſu ſecundo, ſi arcus AF congruat arcui AI: Ergo neuter horum caſuum eſt poſſibilis.

Congruat ergo arcus genitus AF ipſi euoluto AG, Fig. 9. et ducantur rectae AF, AG, quae aequales erunt. Ducantur quoque applicatae GC, FB, ad axes homologos AR, AD; erunt etiam hae aequales, nec non abſciſſae AC, AB; itaque habentur triangula AFB, AGC aequalia et ſimilia, vnde angulus $a=b$, et $a+c=b+c$. Eſt autem $b+c$ rectus per demonſtr., ergo etiam $a+c$ rectus eſt, atque ob AF$=$AG, angulus AFG ſemirectus. Sit iam puncti F tangens FE erit etiam EFA ſemirectus in omnibus curuae punctis. Curua igitur AF ta-

 lis

lis eſt, vt ex eius puncto quouis F, ducta tangens FE, cum recta alia FA ducta in punctum fixum A, faciat angulum conſtanter ſemirectum, quae nulla alia eſt, quam Logarithmica ſpiralis; igitur ea ipſa eſt curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1. Quodſi deſiderentur arcus ſimiles ſolum, eadem curua proueniet. Sit enim arcus AF ſimilis arcui AG; erit triangulum AFB adhuc ſimile ipſi ACG, et angulus FAG iterum rectus; producatur GA, vsque dum occurrat tangenti in E: erit ob EFG et EAF rectos, EA : AF = AF : AG = AB : AC. Sed AB : AC ratio conſtans eſt, quia ſunt abſciſſae arcuum ſimilium; igitur etiam EA ad AF in ratione eadem conſtanti, et angulus EFA iterum conſtans eſt, quae generalis eſt proprietas Logarithmicae ſpiralis.

Corollarium 2. Sit autem Fig. 10. arcus AF ſimilis et aequalis ipſi AG, directe ſumpto, axes homologi vero AD, BE ſint paralleli, et aſſumantur alii duo arcus aequales et ſimiles AK, AL, euidens eſt, ita, creſcentibus applicatis HF, KM, homologas alteras GI, LN decreſcere, quod ſimilitudini curuarum omnino repugnat, adeoque caſum praeſentem excludit.

Theo-

Theorema 4. Curuae, quae euolutae ipſae ſe generant, ſunt 1. Epicycloides omnes, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem. 2. Cycloides ordinariae. 3. Logarithmicae ſpirales omnes, ſub quocunque angulo tangentis et rectae ad punctum fixum ductae; neque praeter has dantur aliae.

Demonſtratio. Linea curua, quae euoluta ſimilem aliam generat, poſita erit ad integram hanc genitam in ſitu vel inuerſo vel directo. Ad ſitum inuerſum requiritur per Theor. 3. vt ducto radio osculi quocunque, et capto a conſtanti quodam puncto eiusdem curuae arcu in data ratione ad hunc radium, triangula comprehenſa radio oſculi primum, deinde ab altero extremo arcus inuenti, ducto, atque perpendicularibus ex vtroque horum punctorum curuae, ad rectam poſitione datam, demiſſis, ſint ſimilia: Sed per Probl. 1. nullae aliae huius naturae inueniuntur curuae, quam Epicycloides, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem, Cor. 1. et 2. Probl. 1. et Cycloides ordinariae Cor. 2. Probl. 1. Igitur hae duae ſolae ſunt, quae ſitu inuerſo ſuas genitas referunt. Ad ſitum vero directum requiritur, vt axes homologi ſint inter ſe normales; nam axes paralleli deducunt ad abſurda per Probl. 2. Coroll. 2. Si vero axes homologi normales ſint, requiritur neceſſario cur-

 ua,

ua , cuius tangens cum recta in punctum fixum ducta faciat angulum conſtantem , per Probl. 2. quae ſunt Logarithmicae ſpirales. Itaque hae enumeratae ſolae, euolutae generant ſibi ſimiles , nec praeter has dantur aliae. Q. E. D.

Corollarium. Ex praecedentibus manifeſtum quoque eſt , quod Cyclois ordinaria ; et Logarithmica ſpiralis , cuius angulus conſtans eſt ſemirectus , generent euolutae alias non modo ſimiles, ſed etiam aequales; Epicycloides vero omnes, et Logarithmicae ſpirales, quarum angulus conſtans eſt maior aut minor ſemirecto , referant tantum genitas ſibi ſimiles.

CLAS-

CLASSIS

SECVNDA

Continens

PHYSICA.

DE
TVBVLIS CAPILLARIBVS
Diſſertatio Experimentalis

Prima

Georgii Bernhardi Bülffingeri.

I.

ACcidit aliquando, vt viſa naturae obſcuriora, cum earundem geneſis requiritur, *ad phaenomena tubulorum capillarium* reducantur. Sic vſu venit, cum indicari cauſſa debet, quae in ſpongia aquam attollit, quae in pannorum laciniis, in terra ſicca et poroſa, in pane varii generis, in vaſis arena plenis; in plantis quoque, et in ipſis montium interioribus. Ipſa *MM. Febr. et Aug. 1726.*

autem aquae in fiſtulis gracilioribus vltra libellam eleuatio variis vtique modis explicari vulgo ſolet.

II. Non admodum diu eſt, quod eruditis innotuit, *exceptionem* dari pro tubulis gracilibus a recepta alioquin hydroſtaticae regula, quae poſtulat, vt fluida in tubis communicantibus eleuentur ad altitudinem grauitati ſpecificae reciprocam. Cum *Paſcalius* ſuperiori ſeculo de liquorum aequilibrio commentaretur, nondum id experimenti cognitum erat publice. Teſtatur id opuſculorum Paſcalii poſtumorum Editor, Monito I. poſt praefationem; idemque primae obſeruationis gloriam Galliae ſuae, inuentorum phyſicorum feraci, vindicat; adſtipulante, qui primam phaenomeni notitiam Angliae intuliſſe creditur *Rob. Boylio*; repugnante autem, qui Florentiam experimenti patriam nominat, *Honorato Fabri* apud *Sturmium* in Coll. Barioſ. P. I. Auctar. ad Tent. VIII p. 77. 78.

III. Vix innotuit elegans phaenomenon, cum *varie* illud a variis exponeretur. Non poſſumus ire per omnia: placet tamen ita rem perſequi, vt intelligatur, quomodo *a rudioribus initiis* ſubinde *magis* magisque *excultae* ſint facti huius explicationes. Nam primi fere in generalibus ſubſtiterunt: et ſucceſſores eorum, quae primos incommoda preſſerunt, nouis ſemper aut reſtrictionibus aut ſupplementis conati ſunt euitare. Praecipue illud attendi meretur, menſurarum apud anteriores mentionem eſſe rariſſimam; apud recentiores ſcriptores perpetuam. Quodnam vtriusque methodi momentum ſit, id vero ex ſequentibus patebit.

IV.

IV. *Phaenomena* tubulorum capillarium *generalia* haec fere recenſet *Sturmius* in Colleg. Curioſ. P. I. Tent. VIII. p. 44. 45.

1. Obſeruatum eſt, in canaliculis vitreis anguſtioribus, e. gr. cauitate ſua piſi aut lenticulae magnitudinem, plus minus, adaequantibus, cum aperti vtrinque in aquam aliquousque demitterentur; hanc, ſiue calida eſſet, ſiue frigida, *ſupra reliquae aquae*, canaliculum extra ambientis, *ſuperficiem* notabiliter eleuari; et quidem, *Phaen.* 1.

2. Quo *arctior* eſſet canaliculus, eo altius. Confer AB, CD, EF. fig. 1. 2.

Quo *altius emineret* tubulus ſuper aquae ſuperficiem, eo altius in ipſo aſcendere aquam, ceteris paribus contendit vir doctiſſimus, vid. Tubulos GH et IK. fig. 1. Sed *fallitur*; forte, quod id ita futurum ratus ex hypotheſi ſua, non ſatis ſolicite attenderit facto naturae; forte etiam, quod inaequalis tubi amplitudo, vel ſuperficiei internae humectatio ex accidenti diuerſitatem fecerint in eleuatione aquae. Certum enim eſt, repetitis ſolicite experimentis:

3. Si tubulus fuerit longior GH, fig. 1. idemque merſus vsque in G. Si altitudo eleuationis fuerit GO, *eandem* illam fore, ceteris manentibus paribus, poſtquam pars HX a tubulo illo ſeparata fuerit, et tubulus in G vsque ſub aquam immerſus. Ceſſant vero hic ſuſpiciones de circumſtantiis negotio alienis: eſtque haec naturae conuenientior correctio, quam illa ipſius Sturmii in Auctario p. 79. qua differentiam eleuationis in natura minus, quam in ſchematiſmo ſuo; imo vix ac ne vix quidem 3.

dem ſenſibilem eſſe confitetur. Pergit autem Vir Clariſſ. memorans, l. c.

Phaen. 4. 4. Aſſumto licet breuiore tubo ML, et eousque immerſo, vt pars eminens LM minor eſſet ſegmentis aliorum longiorum et aeque amplorum, ab aqua ſupereminente IN vel GO occupatis: non tamen aſcendere aquam vltra canaliculi labia, *nec effluere.*

5. 5. Canaliculum *humectatum* prius, *altius* admittere aquam in cauitate ſua aſcendentem, quam id fiat ab exſiccato.

6. 6 Si canaliculus *digito* ſuperne *tegatur* ante immerſionem, non aſcendere aquam: remoto autem digito ſtatim aſcendere, etiam poſt immerſionem.

7. 7. Dum *intra* tubulum *laxiorem* aqua plenum mergatur *anguſtior*, accidere, vt nunc intra laxiorem, nunc intra anguſtiorem altius eleuetur aqua, prout ſcil. maior minorue ſit cauitas laxioris reſidua, quam cauitas minoris. v. fig. 2.

V. Iſta igitur generaliora ſunt tubulorum capillarium phaenomena, quae ex *Honorato Fabri* Sturmius excerpſit. Addam ſubinde plura, partim accepta ab aliis, partim nouiter excogitata. Sed intertexam illa explicationum vulgarium examini, vt varietate dicendorum falli potius lectorum patientiam, quam fatigari contingat. Sunt vero *tres* explicationum claſſes *praecipuae. Prima* fluido prementi externo imputat hoſce effectus. *Secunda* adhaeſionem aquae ad vitri latera cauſſatur. *Tertia* accuſat vitri et aquae mutuas ad ſe inuicem attractiones. Singulae in ramos abeunt, ſed nolo omnia minutim ſecare:

care: Faciat id, et ex dicendis diſcerpat, cui volupe eſt.

VI. Explicationem ab *Honorato Fabri* propoſitam talem in compendio *Sturmius* exhibet, et approbat, ſaltim ab initio; namque in Auctario mutat ſententiam. "Conſtat, *inquiunt Viri Docti*, aerem no-„ ſtrum eſſe non grauem ſolum, ſed et compreſſum. Gra-„ uitatem agere non ſecundum molem, ſed altitudi-„ nem, poſita baſi eadem. Sed compreſſum corpus„ quaquaverſum agere, et tanto magis, quo eſt copio-„ ſius. Id fontes artificiales per compreſſum aerem o-„ perantes, et bombardas teſtari pneumaticas, quo e-„ nim plus aeris iſtorſum compellas cogasque, tanto for „ tiorem eſſe effectum. Aquam igitur in tubulis capil-„ laribus attolli ab aere externo, non quatenus grauitet„ perpendiculariter deorſum; ſed quatenus compreſſus„ valde quaquaverſum vrgeat. Exteriori acceſſum eſſe„ liberum, et in maxima copia ad vrgendam aquam ſibi„ ſubiectam; ſed interiorem aquam nonniſi ab ea parte„ *Fig. I.* aeris attingi, quam conus *ihk* complectatur: ita-„ que eleuari aquam interiorem ab exteriore, quam ma-„ gis vrgeat incumbens maior aeris moles.,,

VII. Sapit *aetatem ſuam* haec explicatio: abutitur enim ambigua locutione; negligit menſuras; impingit in theorema hydroſtaticum, nunc vulgo notum; et ad commune ſuperioris aeui aſylum, aeris operam, confugit. Verum eſt, corpus compreſſum agere tanto fortius, quo eſt (in eodem ſpatio) copioſius, id eſt, compreſſius. Falſum, agere fortius, ſi (in maiori ſpatio)

 tio)

tio) copioſius eſt, ſed aeque denſum. Indubium eſt ſcriptoribus hydroſtaticis, poſita baſi eadem, et aere aeque compreſſo, tantundem agere vim aeris reſtitutiuam ſiue parua, ſiue magna aeris copia adfuerit. Id aliis in locis ipſe *Sturmius* annotauit, cum *Henrico Moro* aeris grauitatem et elaterium neganti occurreret in Coll. Curioſ. P. II. Epiſt. ad Morum §. 63. p. 82. Non igitur ob *maiorem* aeris externi *copiam* fortius vrgebitur aqua exterior, quam interior. An liberior acceſſus aliquid efficere valeat, mox dicam.

VIII. Illud primo ſtatim loco annotari debet: *Aerem* accuſari praeter meritum. Monet *Boylius*, et ex illo vniuerſi ſcriptores Phyſici.

Phaen. 8. 8. Si tubulus ſub campana aere vacua collocetur, aquam in eo ſuſpenſam haerere. Vidi etiam ipſe non ſemel,

9. 9. Si tubulus antea humectatus in vacuo demum aquae immergatur; (quomodo id fieri poſſit, nemo hodie ignorat) aquam perinde in tubulo aſcendere ſub campana, ac in libero aere; ſaltu vtique celerrimo: nec profundam hic immerſionem requiri, ſed ſufficere contactum tubuli et aquae ſubiectae. Conficitur autem ex dictis, niſi aetherem aeri ſubſtituas, actum eſſe de fluidi prementis ad hoc phaenomenon explicandum auxilio.

IX. Non id vero ſine exemplo eſt, vt in eiusmodi caſibus aerem ſuum vsque adeo ſubtilem faciant auctores, vt aetheri ſimilis cum illo trans campanam ire, ſi non liberrime poſſit, poſſit tamen. Excluditur igitur

tur per dicta prius phaenomena craſſioris opera, nondum ſubtilioris et aetherei aeris. Excluditur diſcrimen preſſionis internae atque externae, a maiori minoriue aeris aeque denſi copia oriundum. v. §. 7. Quod ipſum etiam, ſi vel maxime inuitis hydroſtaticae legibus admiſeris, non tamen phaenomenis conſentiet. Neque enim conuenit tertio, ſuperius §. 2. enarrato, cuius contrarium ipſe ex hac ſua hypotheſi intulerat inuentor hypotheſeos. v. Sturm. Coll. Cur. P. I. p. 46. Concluſ. 3. Accedunt autem et alia, quae *iſtam per conulos* ſiue aeris ſiue aetheris incumbentes, et eorundem premendi differentias *explicationem* reſpuunt. Talia ſunt:

10. Aſſumto tubulo longiori, cuius cauitas ab vna extremitate ad alteram nonnihil minuebatur ſucceſſiue, aequalis erat aquae ſupra libellam eleuatio, ſiue pars anguſtior merſa fuerit, ſiue amplior; modo ſuprema aquae eleuatae ſuperficies vtroque in caſu eundem tubuli locum attingeret. *Phaen.* 10.

Iam ſi hoc ad hypotheſin contuleris, primo in caſu ob partem tubi ampliorem aquae ſupereminentem amplior conus eſt, quam in ſecundo: itaque minor debebat eſſe eleuatio aquae, ob minorem aeris eo conulo contenti differentiam ab externo in aquam vaſis premente. Tum vero etiam illud notari debet, quod mediante hoc tubulo fieri poſſit, vt conulo exiſtente minore eleuatio aquae ſupra libellam ſit minor; cum deberet per hypotheſin maior eſſe. Nimirum fig 3.

11. Si pars tubi ſtrictior erat extra aquam, mi- 11.
nor

nor ſubinde fiebat eleuatio aquae ſupra libellam, quo magis extrahebatur tubulus. Eo autem in caſu minorem ſemper conulum fuiſſe incumbentem, id vero erat extra dubium.

X. Non itaque naturae congruit aut ſatisfacit hypotheſis *Fabriana* rudior: Fortaſſe *cultior* facta conueniet? Bina mihi emendatio innotuit, vtraque digna ingenio Auctorum. *Iac. Bernoulli*, ex diuerſa fluidi preſſione fontem repetiit horum phaenomenorum in diſſ. *de Grauitate aetheris* iam A. 1683. edita, p. 239. ſ. Verba haec ſunt: „Sit *abcd* fiſtula cylindrica immerſa ſu-
Fig. IV.
„perficiei aquae ſtagnantis *ed*, cui inſiſtat alius praeterea „cylindrus ſimilis atmoſphaericus *efgh*. Fingamus autem vtriusque diametrum in ſe recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. ſeptem, ita vt ſeptem „tales particulae (quas ſphaericas nunc eſſe ſuppono) in „directum poſitae exhauriant cylindrorum latitudinem, „notabimusque rariſſimum eſſe contingens, ſi globuli „iſti ita ſint diſpoſiti, vt extremi praeciſe radant tubi latera, atque omnes ſeptem ſine obſtaculo in eius cauitatem admittantur (vti fit in ſerie globulorum *il*) plerumque enim, imo ſemper continget, vt ſummi cylindrorum margines vtrinque primum et octauum excipientes „nonniſi ſex intermediis tranſitum praebeant. Quod et „intelligendum de quauis alia aſſignabili ſerie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum „margines incidere ſubſumi debent. Hinc etenim fiet, „vt totus ille globulorum orbis, qui *circumferentiam ſupremi orificii fiſtulae* occupat, cum tota globulorum „ca-

catena perpendiculariter ſibi imminente *am*, *bn*, omnem,, ſuam preſſionem terminet in ſummitate laterum fiſtu-,, lae, *neque poſſit pertingere* ad liquorem ſubiectum *qr*;,, qui proinde ea tantum preſſione afficitur, quae profi-,, ciſci poteſt a cylindro aerio, diametrum *op* ſex dun-,, taxat globulorum obtinente. Aliter vero ſe res habet,, in cylindro aerio *efgh*, extra fiſtulam aſſumto in alia,, quadam parte ſuperficiei ſtagnantis aquae, vbi extremi,, globuli ab eius lateribus *ge*, et *hf*, quae pure ſunt ima-,, ginaria, non impediuntur, quin libere defluant, et to-,, ta ſua latitudine ſuper liquore ſubiecto grauitent. Cui,, conſequens eſt, vt liquor extra fiſtulam tanto maiore,, preſſione afficiatur, quam qui intra fiſtulae latera con ,, cluſus eſt, quanto numerus globulorum illi incumben-,, tium excedit numerum globulorum ſuper hoc premen-,, tium: Vnde liquor ab externa preſſione praeualente ſem ,, per nonnihil altius impellendus in tubum. ,,

XI. In ſequentibus monet Vir Cl. 1. differentiam hanc preſſionum in tubis *amplioribus* eſſe *inſenſibilem*; in ſtrictioribus vero portionem aeris impeditam a tubi marginibus maiorem ſemper rationem habere ad portionem aeris non impeditam: 2. ſequi etiam ex hac hypotheſi, quod *liquores* ſpecifice *leuiores* ceteris paribus *altius* attolli debeant grauioribus, ea proportione, quae eſt inter ſpecificas eorum leuitates: 3. *aquam* ſuperne *non* poſſe *effluere*, etſi minuatur tubi ſupra aquae ſuperficiem eleuatio; orificio enim tubi vtrique aequalem imminere aeris portionem: 4. porro ſuperficiem *mercurii* in talibus fiſtulis debere conſiſtere *infra libellam*, ſi particulas

 eius

eius concipias *groſſiores* aereis, vt extremis earum s et t tubi margini implicatis plus decrementi patiatur preſſio mercurii ex imo ſurſum, quam preſſio aeris deſuper: 5. Denique ex his dictis *ſuperficiem aquae* in fiſtula *concauam* fore, et mercurii conuexam. vid. fig. 5.

XII. Addam curioſitatis cauſſa vſum hypotheſeos rariorem. *Menſurauit* Vir ingenioſus ex hiſce aſſumtis *diametrum* vnius *globuli aerei*, ex cognita latitudine fiſtulae, et altitudine eleuationis aquae ſupra libellam. Sit enim diameter cauitatis fiſtulae $= a$, altitudo aquae internae ſupra libellam $= b$; altitudo cylindri aquei aequiponderantis cylindro aeris atmoſphaerici eiusdem baſeos $= c$, diameter globuli aerei quaeſita $= x$: Erit diameter cylindri aerei ſuperius in aquam prementis $= a - x$, et area eius $= \frac{11aa - 22ax + 11xx}{14}$, area autem totius cauitatis $= \frac{11aa}{14}$, et conſequenter area annularis vitro contigua, cui nullus aer incumbit, $\frac{22ax - 11xx}{14}$. Iam vero per experimenta aer areae huic annulari inſiſtens ad altitudinem atmoſphaerae aequatur columellae aqueae eiusdem baſeos ad altitudinem datam c porrectae: et per hypotheſin haec columna aequatur aquae in tubulo ſupra libellam eleuatae. Igitur $\frac{22ax - 11xx}{14} \times c = \frac{11aa}{14} \times b$; adeoque $2acx - cxx = aab$, et aequatione reducta $x = a - a\sqrt{\frac{c - b}{c}}$. Quodſi igitur $a = \frac{1}{8}$ poll $b = \frac{1}{2}$ poll. $c = 400$ poll. erit $x = \frac{1}{12800}$ poll. exprimens diametrum vnius globuli aerei, vel potius diſtantiam a centro vnius globuli ad centrum alterius; quoniam globuli ob interfluentem materiam

riam aetheream non ſunt contigui. Quin imo, cum ex alio argumento idem Vir doctiſſimus, libro cit. p. 102. intulerit, inter duo quaeuis corpuſcula aerea quatuor aequales materiae ſubtilis portiones interiectas eſſe, ideo diameter vnius globuli aerei emerget $= \frac{1}{62500}$ poll.

XIII. Non poenitet me prolixae recenſionis: meretur illam ſententiae amoenitas; cui praeter hactenus dicta etiam illud commode accidit, quod calculus experimento reſpondeat, vi cuius cognitum eſt, quod

12. Altitudo aquae ſupra libellam in pluribus fiſtulis ſit inuerſe vti diameter cauitatis, hoc eſt, ſi duorum tubulorum T et *t* diametri ſint a et α, atque altitudines aquae b et β, quod ſit $a : \alpha = \beta : b$. *Phaen.* 12.

Dicam inferius, quomodo hoc experimentum fieri debeat: hic illud moneo, per computum §. prioris eſſe $a - a\sqrt{\frac{c-b}{c}} = x = \alpha - \alpha\sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$: ex quo ſequitur $\alpha : a = 1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} : 1 - \sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$, quae analogia vix differt a priori $\alpha : a = b : \beta$, ob quantitatem c admodum magnam reſpectu b et β. Sit enim per experimenta mea $a = 1'''$, $b = 3'''$, $\alpha = \frac{1}{10}'''$ $\beta = 30'''$ et $c = 4800'''$ erit $\alpha : a = 1 : 10$. et $\sqrt{\frac{c-b}{c}} = \frac{69{,}2603}{69{,}2820}$, $\sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = \frac{69{,}0651}{69{,}2820}$, adeoque $1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} : 1 - \sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = 217 : 2169$, quod cum analogia priori conuenit.

XIV. Fateor tamen, eſſe *aliqua* etiam, quae *aſſenſum morantur* noſtrum, alia aliis fortiora. Quod particulae *aereae* ſint aqueis *maiores*, dubium videri debet, donec id liquidis euictum fuerit experimentis. Hactenus in ambiguo res eſt. vid. *Memorias Acad. Scient.*

Hh 2 *Paris.*

Paris. ad A. 1714. p. 71. ſeqq. Fluida *leuiora* ceteris paribus *altius* eleuari ſequitur ex hypotheſi, et ab inuentore ipſo infertur: ſed in experimentis cognoſcitur,

Phaen. 13. 13. Fluida ſpecifice leuiora, vinum et ſp. vini minus alte eleuari, quam aquam. Sic exempli gratia vidi, eleuationes in ſpiritu vini, vino rubro, et aqua ſe habuiſſe vt 4, 7, et 12.

Igitur aut ſententia detrimentum patietur, aut dicendum erit, cetera non eſſe paria; quod de oleis non difficulter conceſſero, quorum fingi minor diuiſibilitas poteſt: an de vino, et ſpiritu vini idem valeat, non dixero cum fiducia. Illud, fateor, me anxium habere, quomodo dici poſſit, quod „ totus ille globulorum orbis, qui „circumferentiam ſupremi orificii fiſtulae occupat, cum „tota globulorum catena ſibi perpendiculariter imminen„te *am*, *bn*, omnem ſuam preſſionem terminet in ſum„mitate laterum fiſtulae, neque poſſit pertingere ad li„quorem ſubiectum *qr*, qui proinde ea tantum preſſione „afficiatur, quae proficiſci poſſit a cylindro aereo, dia„metrum *op*, ſex duntaxat globulorum obtinente.„ Aut totus ille annulus cylindricus, ſpatio *oq* vel *pr* circa axem rotato genitus aere vacuus concipitur, aut non: Si vacuus, cur non ad altitudinem 30 pedum aſcendit aqua vitro contigua, adeoque ad ſupremam vsque tubuli extremitatem? Si vacuus: quis ita ordinate globulos collocauit aerios, vt in nulla cylindruli ſectione totam tubi latitudinem occupent, in tanta praecipue aeris agitatione interna et elateris vi? Si vacuus: cur in ſpatium illud

annu-

annulare non ſuccedit aqua, cum tubulus mergitur digito obturatus? Sin vacuus non eſt ab aere: premet vtique aer non ſolum pro baſi ſuprema *op*, ſed pro ea, quam obtinet aer aquae proximus; vel quae ratio eſt, cur in vicinia aquae non totam occupent tubi latitudinem globuli aerei, cum certum ſit, fluidum elaſticum et compreſſum accommodare ſe ſpatio, cui includitur, ea methodo, vt maximum, quod poteſt, ſpatium occupet.

XV. Quid ſi tubus aſſumatur, cuius interna cauitas ſenſim ſenſimque minuitur; et pars amplior extra aquam collocetur, merſa ſtrictiore: annon aer ſuperne intrans ope ſectionum ſucceſſiue minorum ita ſeſe ſpatio interno accommodabit, vt totam tubuli amplitudinem repleat, non relicto eiusmodi vacuo, cui integrae poſſent particulae inſeri aereae? ſaltem certum eſt, quod hoc in caſu dici non poſſit, impediri aerem ab *orificii ſupremi* circumferentia: et eleuatur tamen aqua ſupra libellam. Vidi,

14. Siue amplior pars mergatur, ſiue ſtrictior, ſemper eleuari aquam, quantum conuenit illi ſectioni fiſtulae, quam ſuprema attingit aqua; vnde pro immerſionis profunditate plus, minus, vel aequaliter eleuatur eminente extra aquam parte tubi ampliore, aut ſtrictiore. *Phaen.* 14.

Conuenit id hydroſtaticae, vi cuius neque amplior in tubulum ingreſſus nocet, neque ſtrictior iuuat eleuationem, ſed tota res redit ad baſin aeris prementis: Non id vero conuenit explicationi a ſupremo fiſtulae orificio deſumtae, ſi ad litteram intelligatur; mox enim videbimus,

quid pro adiumento explicationis dici aduerſus hunc inferendi modum poſſit.

XVI. Nimirum vbi experimenta mea de capillaribus coram ſocietate inſtitui, et de cauſſa eorum ſententias amicorum rogaui, vt ad illas meam, ſi opus esſet, exigerem: Clariſſ. Collega, *Daniel Bernoullius*, neſcius adhuc, quid de hoc argumento Patruus ſcripſerit, *explicationem* priori ſimilem, ſed *caſtigatiorem hanc* ſuppeditauit. Repetit aquae internae ſupra libellam cum externa eleuationem ab impedita ſuperne in fiſtula fluidi incumbentis, non aerei ſolum, ſed praecipue aetherei, preſſione libera. Vult baſin fluidi huius aereo-aetherei aquae contiguam, non tam plenam eſſe ad margines vsque internos fiſtulae, quam plena eſt eodem fluido ſuperficies priori aequalis, ſed in libero aere ſita, vel quam plena eſt fluido aqueo ſuprema aquae ſuperficies. Id vndecunque eueniat, perinde eſt. Interim ſeu exempli ſeu coniecturae loco ponit, particulas eius fluidi eſſe aqueis maiores. Quodſi enim ſuper plano aliquo poſitos concipias globulos maiores, ſuper altero minores, vtrosque ſine ordine, ſed ſibi contiguos; ſi apertura circini quacunque, in plano prioribus parallelo, et per medium horum globulorum tranſeunte, deſcribas circulum: tranſibit vtique peripheria haec per globulos complures. Erigatur ſuper hac peripheria ſuperficies cylindrica; et ſint globuli illi indiuiſibiles: excludentur e cauitate cylindri omnes illi globuli, per quos peripheria tranſiit modo memorata; et maius relinquetur vacuum in illo circulo, qui per globulos ductus eſt maiores. Minor

nor itaque, aut minus repleta baſis eſt, quam globuli formant maiores, ac altera minoribus formata. Quodſi igitur maiores ſunt aqueis globuli aereo aetheri, ſectio tubuli globulis iſtis deorſum prementibus minus adaequate plena erit, quam aqueis ſurſum vrgentibus. Hinc eleuatio, donec aliunde redeat aequilibrium. Quae autem ratio aquam eleuat in fiſtula fluido immerſa, eandem vult eſſe ſuſpenſionis cauſſam, in eadem extracta. Cumque mercurius aeque ac caetera fluida ſuſpendatur, vult eandem mercurii et ceterorum fluidorum ſortem eſſe. Phaenomenon vero mercurii, intra fiſtulam mercurio merſam, depreſſi potius infra libellam, quam eleuati ſupra eandem, aliunde deriuat; ratus, mercurium in vaſe contentum tanta vi ad ſe trahere mercurium, vt et reſiſtat priori cauſſae, et eandem excedat.

XVII. Idem Vir Cl. eodem tempore *ſequentibus* hypotheſin ſuam *phaenomenis* applicuit. Obſeruauit:

15. Altitudinem liquoris ſupra libellam eſſe conſtantem, ſiue fiſtulam profunde mergas, ſiue ſecus; quin imo etiam, cum extrahatur tubulus; quo in caſu ſaepe accidat, vt in extremitate tubuli gutta pendeat aquea. *Phaen.* 15

16. Hanc guttulam diminui, ſi inclinetur tubulus; quòd aqua tamdiu fiſtulam ingrediatur, donec altitudo perpendicularis in fiſtula inclinata aequetur altitudini priori. 16.

17. Euaneſcente guttula liquorem non amplius aſcendere, etſi augeatur inclinatio, niſi tubus verſus ſuperiora ſtrictior fuerit; quo in caſu liquor non ceſſet progredi, quamdiu tubulus inclinetur. 17.

Phaen 18 18. Mox memorata duo experimenta ſuccedere quoque in mercurio, poſtquam is ſuctione in tubulum attractus, et tubulus linguae attactu clauſus extra mercurium in vaſculo ſtagnantem extractus fuerit; eſſe vero altitudinem mercurii ita ſuſpenſi inter ſubſextuplam et ſubſeptulam altitudinis aquae.

19. 19. Eundem ita ſuſpenſum, ſi vaſculo fiſtulam denuo velis immergere, effluere omnem e tubulo, quamprimum mercurii ſtagnantis ſuperficiem contingit; quod argumento eſſe poſſit, eſſe in mercurio vim attrahendi ſeipſum, quae etiam renitatur eleuationi eius in fiſtula ad libellam cum externo.

Denique monuit, non abſolutam particularum aerearum vel aetherearum magnitudinem ex huiusmodi phaenomenis inferendam eſſe, v. §. 12. ſed proportionem ſolum magnitudinis particularum in fluidis diuerſi generis. Ita per phaen. 18. collata altitudine mercurii ſubſeptupla cum pondere bisſeptuplo reſpectu aquae, inferri poſſe, ob duplex mercurii ſuſpenſi pondus, duplo ſubtiliores eſſe illius, quam aquae particulas.

XVIII. *Multa* huic hypotheſi *commode* eueniunt. Ceſſant difficultates a vacuo venientes §. 8.; nequit enim huic fluido trans campanam iter denegari. Euitantur pleraque omnia, quae §. 14. et 15 oppoſui ſententiae priori: non enim vacuus ab aere fingi annulus vitro proximus debet; non eadem globulorum in omni ſectione poſitio; non impedimentum repeti a ſupremo tubuli orificio. Non eſt impoſſibile, vt aqueis maiores ſint globuli aereo aetherei, tanto etiam rariores: neque fortaſſis neceſſum

ceſſum eſt ad magnitudinem referre cauſſam baſeos minus plenae. Conuenit etiam huic ſententiae cum menſura altitudinis phaen. 14. §. 15. ſequitur enim aquae in diuerſis fiſtulis eleuatae quantitas proportionem peripheriae ſuperioris ; cui aequum eſt proportionalem credi excluſionem globulorum aereo-aethereorum a peripheria oriundam. Conuenit cum phaenomenis §. ſuperiore enarratis : Conuenit etiam cum aliis.

XIX. Fateor tamen, indulgente veniam iſtam Cl. Autore, quod *in nonnullis* haeream. Fortaſſe minus difficile eſt occurrere illis, quae ad hanc expoſitionem attinent *ſpecialiter*. Itaque *quaeſtionibus* illa comprehendo, non obiectionibus. Si particulis aereo-aethereis trans vitrum aditus patet, cur ſpatium ſeſe vacuum relinquunt in vitri vicinia, et maius quidem, quam aqua aut mercurius? An aeris craſſioris nulla plane opera accedit in hac hypotheſi? Saltem in experimentis nulla deprehenditur, ob eandem fluidi in vacuo et in aere eleuationem. Cum in tubo humectato aer aut aether vitro proximus mediante illa cruſta aquea lateribus vitri adhaerente aut fortius, aut ſaltem aequaliter premere deorſum poſſit, ac in ſicco, cur altius euehitur aqua in humido, quam in ſicco? Cur circa extimam tubi ſuperficiem aqua ambiens non aſſurgit, cum ſiccus eſt; eleuanda, ſi madidus fuerit? Si eadem eſt ſors mercurii et ceterorum quoque fluidorum, cur aquae in tubulo ſuſpenſae altitudo ſequitur proportionem peripheriae ſuperioris, et altitudo mercurii proportionem inferioris? Nimirum:

20. Si tubus inaequaliter amplus mergatur in *Phaen.* 20

aquam totus, et extrahatur digito obturatus: remoto digito aqua ad eam altitudinem ſuſpenſa haerebit, quae conuenit tubulo cylindrico eius diametri, quam habet ſuprema aquae in tubulo adhuc pendulae ſuperficies.

Phaen. 21. 21. Si mercurio idem tubulus impleatur, et extracto tubulo ſibi relinquatur mercurius, altitudo ſuſpenſionis erit ea, quae conuenit tubulo cylindrico eius diametri, quam habet infima mercurii in tubulo ſuperficies, hoc eſt, orificium tubuli inferius.

Haec duo experimenta et mihi caſu obtigerunt, cum phaenomeno 13, et ſimilibus attenderem, et fiſtula vterer inaequaliter ampla: ſed et eadem ab aliis, praecipue *Iac. Iurinio* iamiam annotata fuiſſe, poſtea cognoui. vid. *Transact. Abrigd. by Henr. Iones* T. IV. P. I. pag. 426. et 434.

XX. Sunt alia vero, quae *generaliter* videntur obſtare, quo minus a differentia preſſionum ſuperae et inferae deriuetur eleuatio aquae aut ſuſpenſio ſupra libellam. Viderint, qui huic ſententiae accedunt, an ea ſufficiat eleganti phaenomeno, quod *Iac. Iurinius* annotauit

Fig. VI. l. c. Sit tubus amplior AB definens ſuperne in capillarem BC; ſit altitudo aquae ſupra libellam, quae amplitudini partis AB conuenit $= a$, et altera, quae anguſtiae partis BC competit, $= b$.

Phaen. 22. 22. Immergatur aquae pars tubi amplior: erit altitudo eleuationis ſupra libellam ea, quam per *a* denotauimus; extractoque paululum tubo deſcendet in illo aqua, quantum tubulus extrahitur, ſic vt eadem ſemper altitudo eleuationis ſupra libellam maneat. Madefiat ſuperio-

perior tubuli capillaris extremitas, dum vel e digito pendens guttula illi admouetur, vt ſupremum obtegatur aqua orificium fiſtulae capillaris C. Poterit tubus extra aquam extrahi, ſic vt aqua in DE contenta non deſcendat, donec columna aquae ſupra libellam eleuatae ſuperet altitudinem *h* antea deſignatam.

Velim autem, meminerint, qui hoc phaenomenon examinabunt: idem in vacuo non minus, quam in aere libero, ſuccedere. Namque ſcio, difficiliorem eius in vacuo explicationem fore: Impoſſibilem tamen non dico. Faciant rei periculum, quibus volupe eſt: aduertant vero ſimul ad ea, quae inferius dicemus, in *tertiae* claſſis examine, §. 52. et ſeqq.

XXI. Grauioris, ſic arbitror, momenti eſt phaenomenon, quod, neſcio, annon *experimentum crucis* vocare liceat in hac explicationum claſſe. Inquiſiturus, an omnino liber aeri aditus pateat in tubos capillares, cogitaui, id ope Barometri poſſe decidi, ſi in vaſculi locum tubus ſubſtitueretur capillaris, per quem atmoſphaera premere ſubiectum ſibi mercurium deberet. Si enim aer trans fiſtulam capillarem ſuſpendere mercurium poteſt ad altitudinem ordinariam, non vtique ab eius impedita preſſione oritur eleuatio aquae ſupra libellam in tubulis ordinariis multum capillari meo amplioribus. In eum finem *Fig. VII.*

23. Adhibui tubum longiorem ordinariis, et gracilem, Barometri ſimplicis recurui in modum, niſi quod vice vaſculi tubus deſineret in fiſtulam vere capillarem et *Phaen. 23*

tam. * In crure longiore mercurius eſt, et ſupra eum vacua ab aere tubi portio adhuc ſatis longa. Inſtrumento ad modum Barometri erecto, guttatim effluxit e capillari fiſtula mercurius, qui in tubo nimius erat. Ceſſante

* *Fortaſſe maius huic experimento pretium ſtatueretur ab aliquibus Lectorum, ſi* methodum conſtruendi tubos eiusmodi *reticerem. Malo autem, vt et ab aliis facile fiat, quod a me factum eſt ſine induſtria ſingulari. Sume tubulum Barometricum longiorem, et nonnihil graciliorem, vt facilior eius inflexio fieri poſſit. Sit ille in altera extremitate clauſus hermetice, in altera apertus. Impleatur mercurio, more quidem recepto, ſed diligenter et exacte, ad altitudinem vsque quatuor pedum, aut amplius. Pars mercurio vacua inflectatur ad perpendiculum tubi reliqui, applicando lampadis flammam in aliquali a mercurio diſtantia, v. gr.* 1. *pollicis, ſi tubus fuerit gracilis; in maiori, ſi craſſior. Pars reflexa denuo in diſtantia circiter* $1\frac{1}{2}$ *pollicis ab angulo, liquefiat ad lampadis vim, et in tubulum capillarem ducendo extendatur. Tubus ita paratus, ſi pro vno ſolum aut altero experimento ſeruire deberet; relinqui in hoc ſtatu poſſet, et inuerti in ſitum erectum. Mihi placuit, crus horizontale vna cum annexa ſibi fiſtula capillari denuo reflectere, vt alteri cruri parallelum excurreret: atque tum demum erigere tubum more Barometri, et ſpectare eius phaenomena.*

ſante fluxu menſuraui altitudinem eius in tubo longiore ſupra libellam eiusdem in crure capillari: et deprehendi eam duobus et amplius digitis excedere altitudinem mercurii in Barometro ſimplici. Variata poſtmodum atmoſphaerae grauitate, mutata etiam eſt altitudo mercurii in hoc tubo. Obſeruaui id in capillari fiſtula, namque in altero crure id non ſuccederet: neque proportionales ſunt hae mutationes illis, quae in Barometro fiunt ſimplici; quoniam capillaris tubuli amplitudo vix ſupponi poteſt eadem per ſpatium nonnihil longius.

Fallor? an inferre licet? Si aer in vere capillaribus poteſt ſuſpendere mercurium *ad totam*, quae grauitati eius reſpondet, altitudinem: cur in ordinariis multo amplioribus non ſufficit eiusdem preſſio ad componendam fiſtulae interiorem aquam cum externa ad libellam? Dixi, *ad totam*: quod enim maior fuit altitudo mercurii; id alteri tribuendum eſt cauſſae, quam preſſioni aeris.

XXII. Succurrit et aliud, quod attendi meretur, experimentum.

24. Aſſumſi fiſtulam valde gracilem, fregi eam in medio, et obſeruaui altitudines, ad quas eleuaretur oleum oliuarum in vno, et vinum rubrum in altero fruſtulo, immerſis ſcil. extremitatibus, quae prius cohaeſerant, vt ſenſibiliter eadem eſſet fiſtularum capacitas. Erat olei altitudo 1. poll. $3\frac{1}{2}$ lin. vini rubri 1. poll. 8. lin. pedis Regii Pariſ. Admiſi in alterum vini columellam ad altitudinem circiter 8. lin. et merſi orificium inferius ſub oleo ad profunditatem trium linearum. Intrauit oleum ad libellam cum exteriori; ibique ſubſtitit. Ex- *Phaen.* 24.

tractam igitur fiſtulam vino iterum immerſi ad profunditatem fere eandem : vidique vinum ingredi non ſolum pro ſubmerſionis profunditate; ſed altius longe, donec vini ſuperi atque inferi, et intercepti inter vtrumque olei columna aequaret altitudinem memoratam 1. poll. 8. lin. Annotaui ſimul columellam olei fuiſſe ſuperne et inferne ſenſibiliter conuexam.

Phaen. 25. 25. Idem obſeruare phaenomenon licuit, quoties fiſtula oleo non fuerat madefacta ab initio : Si oleum trans fiſtulam ſuxi ante, quam vino immerſi, aſcendit oleum quoque ſupra libellam, et vinum ante ſe protruſit. Tota tamen eleuationis altitudo minor fuit, quam eſt altitudo ſolius vini, aut olei. Repetii haec tentamina in diuerſae cauitatis fiſtulis : et deprehendi ſatis conſtantia.

26 26. Vbi alteram adhibui fiſtulae partem, quae ab initio ſtatim oleo, non vino tincta erat, admiſique in eam olei columellam ad $5\frac{1}{2}$ lin. et extractam vino immerſi ad profunditatem linearum circiter 4. nonnihil inclinatam : aſcendit vinum ad lineas omnino decem, ſic vt tota altitudo extra liquorem fieret 12. lin. Haeſitque extracta fiſtula omnis hic liquor ſuſpenſus ad altitudinem lin. 16. Repetitis tentaminibus altitudo vini ſupra libellam varia fuit, ſed ſemper tamen notabilis.

Fateor hic, ſi a differentia preſſionum fluidi ſuperne et inferne urgentis pendet eleuatio liquorum, neſcire me, cur oleum vel plane non aſcendat ſupra libellam phaen. 24. vel ſaltim minus aſcendat, quam ſine vi-

ni

ni praeſentia feciſſet ? phaen. 25. Mihi quid in hoc negotio videatur, ſuo tempore indicabo.

XXIII. Accedo ad *claſſem* explicationum *ſecundam*: et ſimili ordine a rudioribus initiis ad maiorem hypotheſeos culturam ſucceſſiue pergo. Sumit haec claſſis, quantum memini, principium ab *Iſaaco Voſſio*, et per *Borellum* tranſit ad *Carréum*, nouiſſimum eius et ingenioſiſſimum cultorem. Notam huius claſſis characteriſticam facio adhaeſionem aquae ad vitri latera, cuius ope minus grauitare cenſetur aqua fiſtulis incluſa gracilioribus, quam externa amplioris vaſculi libere circumfuſa tubulo. *Iſaacus* igitur *Voſſius* L. de Nili aliorumque fluminum origine cap. 2. ita philoſophari dicitur apud *I. C. Sturmium in Colleg. Cur.* P. I. Auctar. p 81. "Aquam,, natura ſua viſcoſam eſſe ; adhaerere illam vitro , et ab,, eodem ſuſtineri ; partem aquae ſic ſuſpenſam non pre-,, mere in aquam ſubiectam, ſed grauare vitrum ; patere,, id cum fiſtula aquae merſa iterum extrahatur , neque,, enim omnem decidere humorem; ſuſpendi a vitro, quan-,, tum latera valeant ſuſtinere : Aquam igitur in anguſtio-,, ribus fiſtulis ideo aſſurgere, quoniam prima aquae por-,, tiuncula fiſtulam ingreſſa, cum iam ſuſtineatur a fiſtu-,, la , adeoque reſpectu portiunculae ſuccedentis ponde-,, re careat , ab illa attollatur ſupra libramentum aquae,, ambientis. Quanto minutiores fuerint fiſtulae , tanto,, altius aquam aſcendere , quia minores plus habeant ſu-,, perficiei , et plura puncta contactus pro ſua capacitate,, quam maiores , et ſic aquam e pluribus ſui punctis ſu-,, ſpenſam tanto facilius ſuſtineant. Hydrargyrum care-,, re,,

„re ea viſcoſitate reſpectu vitri, eiusque inſuper aequili„brium retundi ab anguſtia fiſtulae minoris; ideoque mi„nus alte ipſum in fiſtulis, quam in ſpatiis latis eleuari. Iſta loc. cit.

XXIV. Eamus per ſingula. Vult aquam eſſe viſcoſam *Voſſius*, et adhaerere vitro: ſic vulgo videmus. Vult ſuſtineri ab eodem, et grauare vitrum. Hoc vero eſt, quod multi negant. Quos hactenus audiuimus, non a vitro aquam ſuſpendunt, ſed mediante fluido externo ſuſtentant in vitro. Quid ergo? *Examinetur* quaeſtio *ad bilancem.* Sic facile cuiuis videbitur, ſaltem primo intuitu. Accipe igitur, quid geſtum ſit? Eſt *Vir eximius*, qui adhaeſionis iſtius veritatem cognoſcere ex tubuli aqua ſua inſtructi pondere inſtituit hac methodo. Tubulum ſuperne cera obturatum, ne ſcil. ingredi per inferius orificium aqua poſſit, nonnihil aquae immerſum reduxit cum contrapondio ad aequilibrium: Remota autem cera, et in lancem congruam repoſita, eleuata eſt in tubulum antea humidum aqua, et pondus fiſtulae auctum. Id ſolers indagator expectauerat, eo quidem conſilio, vt ex aucto pondere adhaeſionem aquae et ſuſpenſionem a vitro cognoſceret. Animaduertit autem, re denuo expenſa, nihil hic concludi poſſe. Tubulus enim clauſus ante ingreſſum aquae tantum a pondere ſuo perdiderat, quantum aqua, ſpatium a tubulo et cauitate eius ſubmerſa occupatum aequans, ponderauerat: ſed aperto ſuperiori orificio et ingreſſa in fiſtulam aqua, perdidit ſolum pro maſſa ipſius tubuli. Itaque auctum videri debuit pondus fiſtulae, etiam independen-

den-

denter ab adhaeſione aquae ad latera. Conf. *Memorias Academ. Scientiarum Paris.* A. 1705. p. 318. edit. Batav.

XXV. Poſſet in mentem venire, quoniam hic impedimento eſt diuerſitas tubuli ſuperne clauſi vel aperti; itemque profunditas immerſionis: Tentandum id experimenti ſub aliqua variatione in tubulis ſemper apertis, et minus profunde immerſis. Videri enim poſſet, ſi ſuſpenſio aquae a diuerſitate preſſionis fluidi ambientis pendeat, fore idem tubuli vacui, et aqua inſtructi pondus: Videri etiam, ex menſura praepondii, ſi quod fuerit, facile iudicium fore, an illud toti, quae tubulum intrauit, aquae reſpondeat, an ſecus? Si enim vitri lateribus aqua adhaereat, pondus aquae totum acceſſurum eſſe ponderi ipſius tubuli. *Feci periculum rei*, aſſumtis tribus tubulis ad ſenſum aeque amplis, et ſuperne in modum ſiphonum inflexi illos, vt ope fili ſerici ſuſpendi ad bilancem poſſent. Reduxi illos cum contrapondio ad aequilibrium vacuos quidem, ſed interne humidos: Tum vero obſeruaui,

27 Quamprimum inferiora tuborum orificia, quae *Phaen.* 27
ſenſibiliter in eodem horizontali plano erant, aquam attingerent, eleuari illam, et rumpi aequilibrium bilancis grauioribus factis hiſce tubulis. Vidi etiam, manſiſſe diutius praepondium, etſi paulatim immerſi in aquam tubuli de pondere ſuo aliquid amitterent.

28. Manſit praepondium, cum extraherentur 28
fiſtulae extra aquam, et ſingulae aliquid ſecum aufferrent; Licuit autem annotare, re ad menſuram exacta,

29. Augmentum ponderis tubulorum adhuc non- 29.

nihil merſorum maius fuiſſe, quam eorundem extractorum: Illud grani vnius, et amplius; hoc ab vno grano nonnihil deficiens. Quod augmentum, vt id obiter dicam, arginibus imputo, qui externae tubulorum ſuperficiei adhaerebant.

XXVI. Certum igitur eſt ponderis augmentum: ſed *nihil* tamen *egimus* omni *hoc conatu*. Vtraque nimirum ſententia idem ponderis augmentum requirit. Quicquid vitro *adhaeret*, grauat in vitrum, ſi ab eo ſuſpenditur. Inde ponderis augmentum. Sed idem vitro accedit, ſi aqua ſuſpenditur a differentia *preſſionum fluidi* ſupra et infra vrgentis. De *hoc* ſi dubites, rem ſic habe: Cum in libero aere vacuus et cylindricus pendet tubulus, eadem eſt prementis atmoſphaerae actio in vtramque baſin, ſuperiorem et inferiorem. Vocetur illa $A = a + b + c$; exprimatque a partem preſſionis, quae lateribus tubi ſemper incumbit, ſiue merſa ſint orificia ſub aquam, ſiue ſecus; exponat b eam portionem, quae per hypotheſin innititur interiori laterum ſuperficiei, cum in aere eſt orificium, et quae aquam dicitur eleuare, cum inferius orificium aquae immergitur: denique c ſignificet partem preſſionis, quae fit in cauitatem tubi Mergatur tubulus vna ſui extremitate ſub aquam, manet ſuperior preſſio inuariata, $= a + b + c$. Sed in preſſione inferiori accedit variatio. Vrget adhuc tubi latera niſus a, vrget cauitatem preſſio c: Verum preſſio b non amplius tubum vrget, ſed aquam ſuſtentat. Igitur preſſio tubi deorſum excedit preſſionem, qua ſurſum vrgetur, parte ea, quam b diximus, et quae per hypothe-

theſin aequalis eſt ponderi aquae in tubulum eleuatae. Idem obtinet, quando tubus vnâ cum eleuata intus aqua extrahitur, eandemque ſuſpenſam conſeruat. Non igitur hoc experimentum quicquam concludit aduerſus illos, qui eleuationem aquae a differentia preſſionis perpendicularis ſurſum et deorſum factae deriuant. Forſan illis obeſt, quos §. 6. diximus cauſſam eleuationis non in hac preſſione, ſed in libera vel impedita aeris motitatione et ad expanſionem conatu quaerere.

XXVII. *Demus* Voſſio tamen, aquam *adhaerere*, et ſuſpendi a lateribus vitri; demusque id tanto lubentius, quod experimentis ſolicite factis mihi conſtat, tantundem praeciſe aquae eleuari in tubulo, quantum comprehendit gutta maxima, quae ex tubo illo pendens adhuc ſuſtentatur, caſura quam primum augeatur. Dedit huic tentamini occaſionem vox vnica, apud *Mariottum* obuia *du Mouvem. des Eaux* P. II. p. 105. lin. 6. edit. Pariſ. 1700. Examen hoc fuit. Sumſi tubulum capillarem ſatis aequabilem, et annotaui altitudinem, ad quam aqua haereret ſuſpenſa in tubulo: tum vero merſi eousque tubulum ſub aqua, vt denuo ſupra libellam aqua aſcenderet, quantum prius fecerat. Sic duplum aquae in tubulo continebatur; quem digito ſuperne obturatum extraxi; vidique remoto digito

30. Deſcendentem ſucceſſiue aquam colligi ad inferius tubuli orificium in guttulam et ſuſpenſam haerere, ſi cauerem a ſucuſſione aut tremulatione tubuli. Si plus aquae in tubulum admiſſum fuerat, cadere guttulam: *Phaen.* 30.

Sin minus, ſuſpendi eam facile, nec diuelli a motitatione tubuli non nimis violenta.

Ita igitur intellexi, tantum aquae ingredi in tubulum, quantum ab eius orificio ſuſpendi poſſit, non amplius. Velim autem, vt, quibus iſta placebit repetere, caueant circumſtantias alienas, et fallaciam accidentis facillime generaturas. Ceterum non diffiteor, me vel ob hanc cauſſam facile admittere, quod pendeat a lateribus vitri et ſuſtentetur aqua.

XXVIII. *Nondum* tamen conſequitur, quod *ſolum* grauet *vitrum*, neque ſubiectam ſibi aquam premat. Si prima aquae portiuncula fiſtulam ingreſſa pondere caret reſpectu ſuccedentis ſecundae: carebit et ſecunda fiſtulam ingreſſa reſpectu tertiae: namque et ſecunda lateribus adhaerebit ſibi contiguis. Sic item tertia reſpectu quartae: et quis erit finis ſucceſſionis? Quae ratio eſt, cur non in omni fiſtula ad ſummitatem aqua aſcendit, cum nulla fiſtulam ingreſſa deorſum premit in ſibi ſubiectam? Fig. VIII. Suſpenditur, *inquis*, quantum latera valent ſuſtinere. Bene eſt. Si latera inde ab A ad B poſſunt ſuſtinere quantitatem AB: poterunt et latera ab A ad C ſuſtinere quantitatem AC, et ſic porro, donec ad finem laterum in D peruenias. Quodſi columella A*a* eleuata eſt in *a*B, quoniam vitrum ſolum grauauit, non ſubiectam ſibi aquam preſſit: cur non eleuatur *a*B in BC; namque et *a*B vitrum ſolum grauat, non ſubiectam ſibi aquam premit. *Praeterea*, ſi aqua vitrum ingreſſa illi adeo tenaciter adhaeret, vt nihil deorſum premat, cur aqua in tubulo

bulo extracto ſuſpenſa , deorſum fertur , ſi tubulum inuertas :

31. Quodſi enim fiſtula fuerit nonnihil longior altitudine ea, ad quam eleuatur aqua ſupra libellam , eademque extracta inuertatur , defluet aquam ex vna fiſtulae extremitate ad alteram. Idemque accidet, ſi extracto tubulo aqua ſuctione nonnihil eleuetur, et ea ceſſante ſibi denuo relinquatur : deſcendit enim ſine mora. Igitur non ita adhaeret, vt deorſum premere non poſſit, ſi ceterae faueant circumſtantiae. *Phaen.* 31.

XXIX. Eſto autem, *adhaereat prima* aquae portio vitri lateribus adeo , vt ſuſtentetur ab ea adhaeſione *tota* deorſum grauitans preſſio : *Non* ideo *eleuabitur* a ſuccedente. Ceſſauerit grauitas : ſucceſſit illi vis aequipollens, et eleuationi renitens ; ipſa ſcil. ad vitrum adhaeſio, quae non minus diuulſioni ſuae renititur , quando ſurſum vrgetur a ſuccedente aqua, quam vbi deorſum nititur ſuo pondere. Quae eſt vis illa , qua vincitur haec reſiſtentia, dum aqua ſurſum vrgeri debet, et omnino eleuari grauis ſimul , et adhaerens vitri lateribus.

XXX. Praeterea, etſi recte dicitur §. 23. in fiſtulis anguſtioribus plura eſſe contactus puncta pro capacitate fiſtulae : non tamen inde ſequitur , aquam e pluribus ſuſpendi punctis , et ideo facilius ſuſtineri. Patebit in ſequentibus , aquam non ſuſpendi a tota ſuperficie interna tubuli , verum a ſola ſupremae ſectionis peripheria. Cumque per phaen. 12. §. 13. altitu-

titudines eleuationis ſint reciproce proportionales diametris cauitatum *, patet in fiſtulis amplioribus aut anguſtioribus

* *Saepe vtar hoc phaenomeno, itaque operae pretium fuerit, vel in notis monere*, qua methodo *id cognouerim. Altitudinum menſura difficultatis nihil habet, ſed menſura diametrorum, praecipue minorum. Equidem menſuratione per circinum actuali non poteſt exacte definiri diameter adeo puſilla. Vulgare artificium per inſertionem ſetarum vel pilorum equi omni caret accuratione. Menſura capacitatis per pondus liquoris datam in fiſtula altitudinem occupantis, pluribus obnoxia eſt difficultatibus, ob defectus bilancium in minutiis, et inaequalitates tuborum in maiori longitudine, qualis neceſſaria eſſet, vix euitabiles. Subſtitui igitur aliud facilius et ſimul exactius menſurandi genus. Adhibui tubulum longiorem circiter 30 poll. anguſtum ſatis, ſed cuius amplitudo ab vna extremitate ab alteram ſenſim ſenſimque nonnihil minueretur; humectaui illum ſugendo aquam trans totum tubulum: tum vero merſa nonnihil extremitate ampliore admodum leniter extraxi tubulum, vt aqua vltra debitam altitudinem ingreſſa efflueret, neque in extractione ſaltus fieret, vbi aquam tubulus deſerebat. Menſuraui altitudinem aquae in tubo ſuſpenſae* = a: *et conuerti tubulum in ſitum horizonti inclinatum ſic, ut ſuperiorem partem aqua occuparet, clauſo hactenus orificio tubi oppoſito. Remoto poſtea digito, vidi deſcendere aquam pro inclinationis menſura ſatis tarde:*

clau-

ribus nec plura nec pauciora eſſe ſuſpenſionis puncta pro

---

clauſoque et aperto alternis orificio alterutro potui illam ſiſtere in loco tubi quocunque, et ex menſurata columellae aqueae longitudine definire rationes diametrorum cauitatis. Cum ad extremitatem tubi anguſtiorem aqua perueniſſet, menſus ſum longitudinem, quam in tubo occupabat, $= b$: *et erecto verticaliter tubo vidi effluere nonnihil aquae, et reliquum ſuſpendi. Annotaui et hanc altitudinem* $= c$, *et conuerti denuo tubum, vt eadem aquae copia in parte ampliori conſiſteret, menſuranda denuo illius longitudine* $= d$. *His factis potui conferre* a *et* b, *itemque* c *et* d, *competentes eidem aquae moli, maiori primo, dein minori. Fuit autem* $a : b = d : c$, *vt de bonitate operationis nihil dubitarem. Potui vero etiam contendere* $a : c$, *vidique eſſe ſine ſenſibili diſcrimine* $a : c = \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{d} : \sqrt{c}$. *Iam ex elementis notum eſt, poſita diametro maiore* p, *minore* q, *eſſe* $p : q = \sqrt{b} : \sqrt{a}$. *Vnde ſequitur* $a : c = q : p$. *hoc eſt: altitudines eleuationis eſſe reciprocas diametrorum amplitudinis. Obiter noto, cauendum eſſe, ne et externa tubuli latera aliquid aquae ſuppeditent: poſt ſuctionem aquae trans tubum praeſtare, vt et aer ſaltem ſemel transſugatur per fiſtulam, et quae ſunt ſimilia, attento ſcrutatori facile obuia. Praeterea etiam* diuerſis *haec methodus adhiberi poteſt* fiſtulis, *ſi earundem orificia dextre noris ſibi inuicem applicare. Denique, cum vniuerſa hoc menſurandi ratio ſit, qualem hic quaerimus, relatiua, poteſt* abſoluta *fieri, ſi vnius ſolum tubuli diametrum noris definire in lineis, aut lineae partibus.*

pro quantitate aquae ſuſpenſae. Sunt enim hae quantitates peripheriis, quas diximus, omnino proportionales. Suſpendatur autem, ſi ita velis, aqua ex tota tubuli interna ſuperficie: erunt per idem phaen. 12. §. 13. ſuperficies abſolute loquendo aequales, et reſpectu capacitatum in anguſtioribus maiores. Cur igitur in anguſtioribus minor aquae moles ſuſpenditur, et maior in amplioribus; ſi praecipue facilius ſuſtinetur in gracilioribus? vti *Voſſius* auctor eſt. §. 23.

XXXI. Melior eſt *Ioh. Alph. Borelli* cauſſa; non enim generaliſſime ſolum aduocauit aquae ad vitri latera adhaeſionem, ſed mechanicam magis magisque determinatam molitus eſt explicationem. Pertinent huc verba eius in Tract. *de Motionibus a Grauitate naturali pendentibus*: Propoſ. 185. p. 239 edit. Lugd. Batav. „In „cauitatibus, *inquit*, ſubtilium fiſtularum internus aquae „contactus grandis eſt et amplus, reſpectu illius aquae mo„leculae ibidem exiſtentis: ergo ſubito ac infimum fiſtu„lae orificium attingit aquam, efficitur in eius interna „et caua perimetro efficaciſſimus contactus, a cuius ad„haeſione fulciri ſuſtinerique poteſt maius pondus, quam „habet puſilla aquae particula inſinuata, et ideo gradus „praedictae virtutis ſuſpenſiuae et adhaeſionis exercetur „in aqua ſubiecta, et proinde ea reddetur aliquo pacto le„uis, ſeu minus ponderoſa, quam ſit aqua collateralis li„bere premens. Et, quia minimae aquae particulae, „poroſitatibus et aſperitatibus internis fiſtulae innixae, „efficiuntur operanturque, vt totidem *vectes*, quae fle„cti poſſunt et interne rotari, neceſſe eſt, vt partes a-

quae„

quae collaterales magis compreſſae a totali energia ſu i,, ponderis vim faciant, impellendo ſurſum particulas a-,, quae, quae minus comprimuntur a vectibus ſupra dictis;,, et ideo rotando excurrere poſſunt inferius efformando,, tumorem, vel monticulum aqueum, qui excurrendo la-,, teraliter altioribus fiſtulae poroſitatibus inſinuabitur, ad-,, haerebitque, et ideo denuo imminuetur eius vis com-,, preſſiua, renouabiturque cauſſa ulterioris ſuſpenſionis;,, et proinde altius aqua intra fiſtulam impelletur, et ſic de,, nouo eminentioribus lateribus adhaerendo ſucceſſiue al-,, tius impelletur, quousque ad ſupremam et maximam,, illam altitudinem aqua perducta, in qua aequilibrium,, cum aqua collaterali libere premente efficiatur: tunc,, quidem quies eius ſubſequetur, nec altius eleuari pot-,, erit.,,

XXXII. In hac eleuationis oeconomia *multa bene* habent: ſunt *aliqua* tamen, quae *auxilium* aliunde requirunt. Adhaeret, *ais*, vitro aqua fiſtulam ſubingreſſa, et ex hac alia quoque quaſi pendula ſuſtinetur: Eoque columna aquea fiſtulae ſubiecta non adeo fortiter deorſum premit, ac circumfuſa collateralis. Eſto id, ſi ita velis. An inde ſequitur, eleuari altius columnam aquae priorem? Videtur id expectare Borellus: ſed credo, grauitatem columnae huius aqueae intercedere huic fiduciae. Sit pondus columellae ita pendulae abſolutum $=a+b$, et pars eius, quae per adhaeſionem non fulcitur $=b$. Sequitur ſubiectam huic columellae aquam premi ſola portio b: ſed non ideo eleuabitur haec columna per alteram ſibi vicinam, cuius pondus eſt $a+b$. Ad eleuationem

 enim

enim non hoc ſolum requiritur, vt preſſio b ſuperetur, ſed vt totum pondus columellae ($=a+b$) eleuetur ab actione alterius contiguae, cuius pondus itidem eſt $=a+b$. Finge pro particulis aquae globulos maiores ſolidos, et pro vi adhaeſionis ac viſcoſitate aquae funiculos, quibus globuli vitro proximi ex parte ſui ſuſpendantur a vitro: Minor erit illarum preſſio in ſibi ſubiectos, ſed non ideo tamen eleuari poterunt a collateralibus. Dum enim eleuari debent, totum illorum pondus ſurſum vrgeri debet, nec adhaeſio eleuationem *per ſeſe* adiuuat.

XXXIII. Fortaſſis inde peti ſubſidium poteſt: quod particulae poroſitatibus innixae efficiuntur operanturque *vt totidem vectes*, qui flecti poſſunt etc. Vellem Vir egregius hanc rem diſtinctius et ſpecialius enuntiasſet, vt conferri cum effectu ſuo cauſſae menſura poſſet. Eſt, quid id fecerit: cuius dicta mox expendam curatius. Hic illud nota, monticulos et tumores, quos appellat Vir Clar. in eleuatione aquae, ſi recte mentem aſſequor, non ita obſeruari. In tubulis madefactis celerior eſt eleuatio, quam vt definiri figura ſupremae ſuperficiei certius poſſit. De ſiccis autem hoc notaui:

Phaen. 32 32. Dum aqua in fiſtulis ſiccioribus ſucceſſiue eleuatur, in parietibus primo aſcendit, et valde inaequaliter; non in medio tubuli.

33 33. Eademque in omnibus tubulis poſt eleuationem habet ſuperne concauam potius, non vero conuexam ſuperficiem.

Vtrumque hoc ideae repugnat Borellianae, ſi monticulos ſuos intelligit de eleuatione aquae in medio tubi. Sin

Sin fortaſſis ſola particulae vnius aqueae craſſitie diſtare tumores illos a vitri parietibus voluerit, fatendum vtique eſt, contrarium per obſeruationes immediatas deprehendi non poſſe. Videtur autem huic theoriae minus congruere phaenomenon aliud a me obſeruatum.

34. Sit ſipho capillaris, et ſtatuatur ita, vt cruris breuioris orificium *a* pauxillum tantum ſub aqua mergatur; ſitque fiſtula interne madida: aſcendit aqua ad altitudinem eandem *dc* in crure longiore, ſiue integrum conſerues ſiphunculum, ſiue abrumpas in *b* a longiore crus breuius. *Phaen.* 34 *Fig. IX.*

Hic duo ſunt, quae Borellianae explicationi officiunt: non eſt hic pendens ex orificio immerſo guttula, e cuius ſuſpenſione rumpatur aequilibrium; neque eſt altior aquae columna orificio incumbens aperto. Tum vero ipſa aquae columna *ab* in ſiphone iſto non agit liberrime, ſed pars eius nonnihil ſuſtentatur a lateribus vitri in crure breuiore. Quid igitur eſt, quod aquam eleuat ex *d* in *c*?

XXXIV. Deficit etiam Borelliana expoſitio in hoc, quod neſcias, *an* ex mente Viri eximii adhaeſio aquae *ad totam* tubuli *ſuperficiem* attendi debeat, vel ſecus? Primum videtur ex diſcurſu eo, quo maiorem aquae in fiſtulis gracilioribus altitudinem explicat. Namque Propoſ. 188. p. 243. id phaenomeni hinc infert, quia adhaerentia et connexio aquae *parietibus internis,,* *canalium* maiorem proportionem ad molem aquae in-,, ſinuatae extenſiue et intenſiue in canaliculis ſubtiliſſimis,, habet, quam in amplis et capacioribus.,, *Extenſiue*

 quia,,

,,quia vis adhaeſionis menſuratur a contactibus, et ideo ,,*a ſuperficie interna* canaliculorum ; e contra reſiſtentia ,,menſuratur a pondere cylindri aquei contenti in iisdem ,,canaliculis; eſtque proportio cylindrorum aqueorum ,,eiusdem altitudinis duplicata eius rationis, quam habent ,,eorum perimetri internae etc.,, *Intenſiue* ,,quoniam ,,facultas et energia adhaeſionis minus efficax eſt, quan- ,,to magis a parietibus remouetur.,, Equidem hic, niſi me omnia fallunt, adhaeſio conſideratur reſpectu totius ſuperficiei internae, quam aqua contingit.

XXXV. *Secus* rem definire *videtur*, cum alteri phaenomeno explicando incumbit. Memorat Propoſ. 187. p. 241.

Phaen. 35. 35. Aquam in fiſtula magis demerſa non altius eleuari, quam in ea, quae aquam aut aerem tangit; quin imo pag. ſeq. tradit, aquam in aere altius ſuſpendi, quam cum inferius orificium aquae immergitur.

Vt haec cum adhaeſione aquae ad vitri latera reducat in concordiam, contendit, aquam fiſtula comprehenſam ,, *non* reddi *leuiorem ob internum contactum fiſtu-* ,,*lae*; nam *internam* fiſtulae *ſuperficiem*, cum ſit madida ,,*nihil aut parum impedire vim grauitatis* aquae contentae ,,intra fiſtulam; patere id experimento, cum in aere ,,transferatur fiſtula, tunc enim aquam intra cauitatem e- ,,ius madidam libere moueri et deſcendere: praecipuum ,,impedimentum in *extremo fiſtulae orificio* reperiri; non ,,intra aquam, ſed poſtquam aerem contigerit.,, Vult enim infimas aquae particulas quaſi aliquod rete tenſum et reſiſtens conſtituere in libero aere, cui adeo inniti portium-

tiuncula quaedam aquae ſuperioris poſſit: ſed dum illae aquam contingant, ſolui rete, et deſcendere hanc portiunculam etc. Hic, fateor, videri mihi, quod non amplius tota tubuli interna ſuperficies veniat in computum Viri. Quid ergo? Dicendum eſt, aut me non aſſequi mentem eius: aut illam ſibi non penitus conſtare; ſaltem non omnia hic eſſe ad liquidum deducta.

XXXVI. Excoluit hypotheſin Vir ingenioſus, *Ludovicus Carré*, cuius meditata legi poſſunt in *Memoriis Acad. Scient. Pariſ.* ad A. 1705. p. 317. ſeqq. edit. Batau. Summa huc redeunt capita. *Primo* adhaeſionem aquae ad tubi latera, eiusdemque ad eleuationem aquae concurſum ex eo probat, quoniam.

36. Si ſebo liquefacto internos tubuli parietes inunxeris, non aſcendit aqua interior vltra libellam cum exteriore. *Phaen.* 36

37. Atque ſi partem ſolum ſuperficiei internae ſic illeueris: aqua ex eo latere non eleuabitur; eleuabitur autem ex altero, quo nihil ſebi tubulus accepit. 37.

38. Praeterea, ſi profundius aquae immergatur fiſtula, quam ſebo vncta eſt, aſcendet aqua ſupra libellam in tubulo. 38

39. Denique, ſi guttula aquae per exteriorem fiſtulae ſuperficiem deſcendat, illa tubum intrabit dilapſa ad vsque infimum eius orificium, ſi ſebo non inunctus fuerit; ſin fuerit, non vtique haec guttula fiſtulam ingredietur. 39

Secundo ipſam eleuationis oeconomiam ſic concipit: Dum vitri parietibus adhaeret contigua aquae portio: ſuſtentatur illa, et minus grauitat in fundum vaſis, quam

collaterales aquae columellae. Itaque ab hiſce praeualentibus eleuatur. Sit AB ſuperficies verticalis ; et
Fig. X. corpus quodcunque FD vna ſui extremitate innitatur puncto D ; Sit C eius centrum grauitatis : certum eſt, ſi hoc corpus debeat ſuſtentari in puncto F per potentiam quamcunque *x* , fore DF ad DC, vti eſt grauitas corporis DCF deorſum nitens, ad potentiam praedictam. Ita igitur particulae aqueae vitro proximae ſuſtentantur ex parte a fiſtulae lateribus;neque tota ſua vi grauant fundum vaſis : igitur eleuantur a lateralibus columnis tamdiu , donec altitudo reddat, quod per adhaeſionem deceſſit, atque adeo iterum emergat aequilibrium.

Tertio ex hiſce principiis reſoluit quaeſtiones huic argumento connexas. *Cur non eadem ſit eleuatio in ſuperficie tubuli externa* , cui non minus adhaerent particulae vitro contiguae ? Quoniam intra tubum ſeſe mutuo ſuſtentant particulae , atque ſic eleuationi ſuae auxiliantur : non item extra tubulum ; vbi accidit , quod intra ampliores etiam tubos fieri videmus. *Cur in gracilioribus altior eſt aquae ſupra libellam eleuatio* ? quoniam vis adhaeſionis menſuratur a ſuperficie interna fiſtularum, et reſiſtentia ex pondere columnarum aquae contentae ; ſunt autem hae in ratione duplicata diametrorum cauitatis , illae in ſimplici ; itaque ſuperficies amplioris tubi minor eſt reſpectu aquae ſuae, et minor vis adhaeſionis. *Cur ſpiritus vini* , leuior aqua, *non eleuatur altius*, *quam aqua* ? Credibile eſt, aquae maiorem eſſe contactum ad vitri latera , quam ſpiritus vini, etſi leuioris, et fortaſſe diuiſibilioris. Si a columnis aquae collateralibus eleuatur

tur aqua, *cur extracto ex aqua tubulo eadem non effluit*, ſed ſuſpenditur in fiſtula? quoniam paruulum eius pondus non ſufficit ad ſuperandam reſiſtentiam, quam aer diuulſioni ſuae opponit, aut preſſionem, qua corpora ſe leuiora ſurſum pellit. *Cur in tubis aequalibus* aequaliter aut inaequaliter *inclinatis aqua ſemper aſcendit ad eandem altitudinem perpendicularem*? Quia momentum aquae non ex pondere eius abſoluto menſuratur, ſed per altitudinem verticalem, vti conſtat ex hydroſtaticis. Denique

40. Si in tubo ſicco aſcendat aqua vsque in C, eadem in madefacto aſcendet altius, v. g. in D. Si mergas tubum, vt aqua amplius aſcendat, et denuo illum extrahas, deſcendet aqua et formabit pendulam in B guttam; ipſa tamen haerebit vltra D v. g. in E. Si aquam denuo attingat gutta B, deſcendet aqua ex E in D; et ex aduerſo, ſi in tubulo extracto haeſerit ad C, aſcendet illa vsque in D, cum aquam attigerit. *Phaen.* 40 *Fig. XI.*

Quae iſtius rei ratio eſt? Nimirum ſequuntur haec ex perpetuo rerum ad aequilibrium niſu, quo fit, vt aqua nimium alte ſublata in E vsque deſcendat, cum poteſt; et minus alta ex C in D aſcendat. Haec eſt Viri Praeſtantiſſimi *Theoria*, in compendium redacta: applicationem eius ad ſecretionis animalis negotium non eſt huius loci attingere.

XXXVII. Equidem haec ita animo blandiuntur, vt neminem niſi inuitum huic expoſitioni contradicere poſſe arbitrer; adeo vt mirum non ſit, et ipſum Auctorem, et ex eo tempore plures alios eidem acquieuiſſe.

Sunt

Sunt *aliqua* tamen, quae *diſſimulari non debent. Praecipuum* hoc eſt. Ex ſententia Carréana ſequitur: Cum tubulus aequaliter amplus immergitur aquae profundius, aquam eleuari debere ad altitudinem maiorem. Intuli id ex eo, quod maior hoc in caſu ſuperficies eſt interna tubuli, cui aqua innititur; adeoque plus decedit ponderi columnulae in fiſtula contentae; namque totam ſuperficiem internam vocari in ſubſidium vidimus. Suſpicarer, me in hac illatione falſum, aut minus perfecte mentem Viri aſſecutum eſſe, niſi bonam eſſe hanc conſecutionem *Illuſtris Academiae Hiſtoricus* teſtaretur. „Sequitur, *inquit*, ex hiſce principiis, altius eleuari a„quam, quando cauitas tubuli eſt anguſtior, aut immer„ſio tubuli profundior.... Secundo caſu maior colu„mnae aqueae, tubum ingreſſae, pars fulcitur a lateri„bus. Atque hic caſus explicari per inaequalem aeris „preſſionem non poteſt.„ Optime iſta, ſed appellemus experientiam. Vidi repetitis ſaepe tentaminibus:

Phaen. 41 41. In tubulo aeque amplo et humectato aquam eleuari ad eandem altitudinem, ſiue merſus ſit profunde tubulus, ſiue attingat ſolum ſupremam aquae ſuperficiem, idque in vacuo non minus, quam in libero aere; et in omnibus hiſce caſibus aſcenſum eſſe promtiſſimum. Vidi eadem omnia fieri, cum tubuli loco ſiphonem adhibui, qualem phaen. 34. deſcripſimus.

Ego vero, ne fallerer apparentibus, adhibui tubulum omnino longiorem, eundemque alternis ita immerſi, vt aqua eleuata eundem ſemper locum in tubulo attingeret, mergendo nunc ex vna parte 27. poll. nunc duos ex

ex altera. Cum enim cylindrici perfecte tubuli vix occurrant, fieri vtique poteſt, vt pro maiori immerſione maior ſit aquae ſupra libellam eleuatio, ſi ſcil. tubulus extra aquam eminens ſenſim anguſtior fiat: poteſt etiam fieri, vt pro maiori immerſione minor eleuatio ſit, ſi augeatur ſenſim cauitas tubuli extra aquam reſidui. Vidi exempla facti vtriusque, vt adeo neceſſum non ſit, ſiqui congrua hypotheſi phaenomena vidiſſe ſe teſtentur, ſolicitare fidem eorum: ſed coniicere cauſſam liceat in differentias nonniſi poſt multam cautionem ſenſibiles.

XXXVIII. Vt haec preſſius examinentur, reduci ad calculum poſſunt ſequentem. Hypotheſis Carréana annulo aqueo cylindrico, ſuperficiei internae vitri contiguo, minorem aſſerit grauitationem deorſum, quam pro pondere ſuo naturali. Eſt enim potentia ſuſtentans particulam quamcunque in DF, quae aequatur preſſioni eius in F, ex §. 36. ad pondus abſolutum particulae ($=p$) vti DC ad DF. Sit igitur diameter luminis tubi $=2b$. Altitudo aquae capillaris, hoc eſt, eleuatio eius ſupra libellam cum exteriore $=d$. Profunditas immerſionis orificii inferioris in aquam $=a$. Latitudo annuli cylindrici memorati $=c$. et ratio radii ad peripheriam circuli $=\varrho:\pi$. Erit tota preſſio columnae aqueae externae, cuius baſis aequatur orificio tubuli, et altitudo profunditati merſionis tubuli, $=\frac{\pi abb}{2\varrho}p$: Et huic per hypotheſin aequari debet preſſio columnae, aqueae in tubulo contentae. Haec autem preſſio fit partim ab annulo praedicto, lateribus vitri contiguo, cuius baſis

$=\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)$ et altitudo $=a+d$, et preſſio ad pondus abſolutum, vti DC:DF. Ponendo igitur DC:DF$=m$ erit preſſio huius annuli in ſubiectam ſibi aquam $=\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)(a+d)mp$. atque haec vna pars eſt preſſionis aquae internae: altera fit a nucleo aquae cylindrico, intra hunc annulum comprehenſo, cuius baſis $\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2$ et altitudo $=a+d$; adeoque pondus abſolutum et preſſio in aquam ſibi ſubiectam $=\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2(a+d)p$. Habetur igitur per hanc hypotheſin aequatio fundamentalis

$$\frac{\pi}{2\varrho}abbp=\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2(a+d)p+\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)(a+d)mp.$$

Siue $$abb=(b-c)^2(a+d)+(2bc-cc)(a+d)m.$$

XXXIX. Hic iam ſponte fluunt pleraque. Si aequationem reducas ad literam d pro inuenienda altitudine capillari ſub datis circumſtantiis, fiet

$$d=\frac{2abc-acc-am(2bc-cc)}{bb-2bc+cc+m(2bc-cc)}$$

vbi patet, valorem ipſius d fieri variabilem, variata a profunditate immerſionis: manente enim tubuli amplitudine eadem, b eadem eſt per hypotheſin, et c eadem ſine ſine dubio: adeoque valor ipſius d propter litteram a numeratori formulae inuolutam maior erit pro maiori fiſtulae immerſione, vti §. praecedente 37. iam admonui. Viceverſa, ſi aſſumta d conſtante ex phaenom. 40. reducas aequationem ad c latitudinem annuli vitro adhaerentis, erit

$$c=b-b\sqrt{\frac{a-ma-md}{a+d-ma-md}}=b-b\sqrt{\frac{md+ma-a}{md+ma-a-d}}$$

fietque annuli latitudo, in tubo etiam cylindrico, inaequalis pro immerſionis profunditate; quod etſi in calcu-

lo

lo nihil adhuc abſurdi inuoluat, phyſice tamen minus congruum eſt. Cur enim plus aut minus adhaereat lateri per aſperitatem lateris et glutinoſitatem aquae, ſi plus aut minus profunde merſa fuerit eadem fiſtula? vt nihil dicam de proportione admodum complicata, quae obtineret inter a et c, ſi curari deberet, vt poſita a arbitraria ſemper idem valor ipſius d prodiret?

XL. Melius iſta patent, quando ſubſtitutis literarum loco numeris abſolutis et per experientiam definitis intelligimus prodire valores minus vtique commodos. Dabit experimenta Vir ſolertiſſimus.

42. Monet enim, ſe adhibitis tribus tubulis, quorum diametri cauitatis fuerint $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ vnius lineae, obſeruaſſe altitudines capillares 10, 18, 30 linearum. vid. Memorias Acad. Scient. Pariſ. ad A. 1705. p. 318. Liceat quartum addere prioribus, quo cognoui, in fiſtula diametri 1. lineae altitudinem capillarem fuiſſe 3. lin. *Phaen.* 42.

Quae vtique omnia ſatis conueniunt cum propoſitione §§. 13. et 30, qua iniungitur, vt altitudines capillares ſint reciprocae diametrorum cauitatis. Poteſt vero examen propoſitum inſtitui dupliciter. Certum eſt, c ſiue latitudinem annuli minimam fore, ſi fingas totam illius annuli preſſionem ſuſſlaminari, et vitro adhaerere; adeoque $m = 0$. Videtur vero etiam, naturae id eſſe prae ceteris conueniens, vt centrum grauitatis C fingatur in medio particulae DCF, adeoque vt fiat DC : DF = 1:2, et conſequenter $m = \frac{1}{2}$.

XLI. Sit primo loco $m = o$. adeoque $c = b - b\sqrt{\frac{a}{a+d}}$.

Sitque $a = 1$. lin. namque ita licet, per phaen. 41. §. 37: erit c in primo experimento $= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{1+10}} = \frac{1}{6} - \sqrt{\frac{1}{396}}$ id quod excedit $\frac{1}{9}$ lin. In ſecundo erit $c = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{19}} = \frac{1}{12} - \sqrt{\frac{1}{2736}}$, quod ſuperat $\frac{1}{16}$ lin. In tertio eſt $c = \frac{1}{20} - \frac{1}{20} \sqrt{\frac{1}{31}} = \frac{1}{20} - \sqrt{\frac{1}{12400}}$, quod paulo plus eſt, quam $\frac{1}{25}$ lin. Denique in quarto erit $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ lin. Sit iam ſecundo loco, $m = \frac{1}{2}$ prodibit valor ipſius $c = b - b\sqrt{\frac{a-d}{a+d}}$, hoc eſt in primo caſu $= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-10}{1+10}}$, in ſecundo $= \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1-18}{1+18}}$, in tertio $= \frac{1}{20} - \frac{1}{20} \sqrt{\frac{1-30}{1+30}}$, in quarto $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1-3}{1+3}}$, neque poſito $m = \frac{1}{2}$, euitari poterunt imaginarii valores, niſi a ſit maius, quam d; vel poſito $a = 1$, et d numero quocunque maiore, niſi m ſit minor, quam $\frac{a}{a+d}$, quorum vtrumque neceſſitates obtrudit ab experientia alienas. Notandum vero eſt circa hos valores imaginarios, intelligi hac ratione, quod latitudo illa annuli non facile concipi poſſit vt compoſita ex pluribus aquae particulis ſibi inuicem innexis. Etſi enim hac excuſatione euitari poſſet incommodum de nimia vnius particulae aqueae mole: non facile alterum poterit caueri de valoribus imaginariis; hic enim credibile eſt, fore valorem ipſius $m = \frac{1}{2}$, vel etiam omnino maiorem.

XLII. Eſt et aliud, quod dubium habere lectorem poteſt. *Latitudo annuli* a lateribus fiſtulae ſuſtentati penitus aut ex parte, per ipſum huncce computum *maior* prodit *in* tubis *amplioribus*, quam in ſtrictioribus. Patet id ex modo dictis. Sed vero ſcriptoribus de hoc argumento omnibus, ipſique etiam Auctori ſententiae con-

ſtan-

ſtanter viſum eſt, anguſtiam tubuli magis fauere ſuſpenſioni liquorum, quam amplitudinem. Audiuimus Borellum §. 34. et Carreum §. 36. cui adde dicta Illuſtris Hiſtorici, ad A. 1705. p. 30. med. Incubuerunt ſcilicet Viri induſtrii huic curae vt maiorem in fiſtulis anguſtioribus altitudinem explicarent: Cur non etiam illi, vt maiorem aquae quantitatem in amplioribus tubulis eleuatam reducerent in concordiam ſententiae ſuae? Eadem eſt in vtroque tuborum genere ſuperficies interna: Si facilior eſt in anguſtioribus adhaeſio, cur plus aquae adhaeret amplioribus?

XLIII. Poſſent plura addi ſpecialia, cuiusmodi forent de tubulis ſibi mutuo inſertis, vbi calculo non videtur cum experientia conuenire; vel vbi tubulus adhibetur inaequalis ſub aqua amplitudinis, et ſimilia, quibus nolo immorari. Si quis enim, quae hactenus dixi, ſciat cum hypotheſi Carréana, rectius fortaſſis intellecta, combinare, de ceteris non deſpero phaenomenis. Viderint itaque, quibus id volupe eſt, *an recte intellexerim* meditata Viri, et conſequenter, an, quae hic attuli, ad rem pertineant, vel ſecus? Facile cedam rectiora monentibus.

XLIV. Supereſt *tertia* explicationum *claſſis*. Suppeditant illam Philoſophi quidam *Angli*, gens menſurarum et curioſiſſima et ſcientiſſima. Illi cauſſam huius phaenomeni quaerunt in attractione corporum mutua. Creditur enim, a vitro aquam ſibi proximam attrahi, et attrahi fortius, quam aqua trahitur ab aqua: Ex aduerſo mercurium trahi quidem a vitro, ſed trahi debilius, quam

 a mer-

a mercurio. Itaque ſupra libellam eleuari ab hac vitri virtute aquam; et mercurium renitentia ſua obſtante conſiſtere infra libellam, quando fiſtulae ſunt graciliores.

XLV. Primus, qui attractionem iſtam in ſubſidium hoc loco vocauit, quod ego ſciam, *Hauksbeius* eſt. Opinatur vero, totam tubuli internam ſuperficiem aquae contiguam trahere aquam. Id experimentis minus conuenire, ciuis eius, Iac. Iurinius admonuit. Nimirum propter phaen. 12. §. 13. et 30. ſuperficies interna tuborum, aquae vltra libellam eleuatae contigua, eadem eſt in omni tubo, eademque fauorabilius conſtituta in anguſtioribus, quoniam minor eſt particularum aquae mediarum diſtantia a parietibus: Cur igitur plus aquae attollitur in amplioribus? an eadem cauſſa fauorabilius applicata effectum producit minorem, quam applicata debilius? Potuiſſet hoc incommodum Hauksbeius praeuidere, namque et ipſe rationem diametrorum inuerſam obſeruari in altitudine aquae capillari annotauerat. v. Curſ. Experim. Tab. 10. Pneumat. fig. 4. et 5.

XLVI. Fortius adhuc argumentum eſt ſub iis circircumſtantiis, quibus id Iurinius produxit l. c.

Phaen. 43. *Fig. XII.* 43. Si tubus CDE conſtat duabus partibus ampliore et anguſtiore, ſitque altitudo, ad quam aqua in anguſtiore cylindrico aſcenderet, aequalis altitudini totius tubi; altitudo vero, ad quam in ampliore cylindrico eleuaretur, nonnihil maior altitudine partis anguſtioris in tubo DE: Repleatur tubus aqua, et mergatur pars anguſtior ſub aquam, cadet aqua tubo incluſa vsque ad eam

eam altitudinem, ad quam eleuaretur in tubo ampliori cylindrico; ſin pars amplior merſa fuerit, omnis in tubo DC ſuſpenſa haerebit aqua.

Hic eadem eſt ſuperficies attrahens, non ſolum aequalis, et diuerſimode conſtituta: Cur igitur in vno caſu omnis ſuſpenditur aqua, in altero non item?

XLVII. *Praeſtat* igitur hypotheſi priori *Iuriniana*, quae et ſuſpenſionem aquae repetit ab attractione ea, quae fit a ſola ſuperficiei ſupremae peripheria, et eleuationem a proxime contigua. *Primo* id rationi magis conuenit, haec enim ſola tubi pars eſt, a qua ſubſidens liquor teneretur recedere? ſola, ad quam aſcendens liquor accedit proxime: ſola igitur, quae vim ſuam attractiuam exercere ad ſuſtentationem aquae vel eleuationem nouam poteſt. *Secundo* menſuris reſpondet. Infinita ſunt phaenomena, quae docent altitudinem eleuationis reſpondere diametro, adeoque et peripheriae ſuperficiei ſupremae, cum de aqua quaeritur, et infimae, cum de mercurio; vtrumque ita, vt altitudines ſint inuerſe, et quantitates aquae vel mercurii ſuſpenſi in tubulis cylindricis directe vti diametri. Accipe experimentum Viri eximii.

44. Sit EDC tubus parte ampliori et ſtrictiori inſtructus; denotet AF altitudinem eleuationis, quae reſpondet parti ſtrictiori, et GB altitudinem capillarem tubi amplioris: Sit autem DC minus, quam AF. Mergatur tubi orificium amplius, et impleatur tubus ad altitudinem maiorem quam GB, deſcendet aqua quamprimum libera erit, vſque ad altitudinem GB ſupra libellam. Mergatur denuo tubus, vt aqua attingat partem fiſtu- *Phaen.* 44. *Fig. XII.*

fiſtulae graciliorem et extrahatur iterum ſucceſſiue, ſuſpendetur tota aquae columna DC.

Equidem hic nihil eſt, quod aquam altius ſuſpendere poſſit, quam contactus eius ad peripheriam tubi ſtrictioris. Vnde etiam fit, vt inuerſo tubo, merſoque orificio ſtrictiore, altitudo aquae eleuatae maior obtineri non poſſit, quam GB, ſi ſuprema aquae ſuperficies conſtituitur in tubo ampliore.

XLVIII. Eſt haec adeo amica naturae proportio, vt, ſi tubi amplioris loco *magnum* fiſtulae graciliori *vas* adiunxeris, poſſis tamen ſuſpendere aquam ad altitudinem peripheriae ſtrictioris tubuli conuenientem. Debeo hoc moniti eidem *Iurinio*, qui obſeruat,

Phaen. 45 45. Si vaſi ampliſſimo, ſed altitudinis paulo minoris, quam quae conueniat eleuationi aquae in tubulo mox memorando, affigatur ſuperne tubulus capillaris minutae admodum diametri; ſi vas illud aquae immergatur, donec aqua tubulum ingrediatur: poſſe omnem illam in vaſe contentam aquae molem ope huius vaſis eleuari ſupra libellam cum exteriori.

Vnde Corollarium ſatis *paradoxum* ſequitur, poſſe ſcil. molem aquae quantamcunque ope tubuli capillaris eleuari ſupra libellam ambientis.

XLIX. *Non* debet *obiici* his dictis: Si peripheria tubi ſtrictioris nonniſi columnam aqueam altitudinis AF ſuſtentare poteſt in tubulo gracili cylindrico: quomodo illa ſufficit columnae aeque altae, cum tubus inferne amplior, et moles aquae maior eſt? Vel vice verſa: Si peripheria tubi amplioris CD poteſt eleuare columnam

aeque

aeque amplam ad altitudinem GB; cur non altius eleuare poteſt aquam, ſi pars huius altitudinis occupatur a tubo ſtri- ctiore, atque adeo minor eſt aquae moles? *Reſpondet* Vir iudicioſus ex vulgari hydroſtatica. Molem quidem aquae in his caſibus inaequalem eſſe: Sed praeter molem conſiderari et velocitatem debere, qua deſcendere deberet ſuprema aquae ſuperficies, ſi inferior aqua efflueret. Momenta, *inquit*, vtriusque columnae aqueae fig. 12. §.„ 47. eadem ſunt, ac ſi tubuli ED et CD vsque ad aquam„ in AB ſtagnantem conſeruarent amplitudinem eandem;„ ſiquidem velocitates aquae, vbi ampliantur vel contra-„ huntur tubuli, ſunt ad velocitates prope peripheriam„ attrahentem reciproce vti ſectiones harum columna-„ rum.„ v. l. c. p. 427.

L. Non poſſum diſſimulare, *hypotheſin* hanc adeo commode phaenomenis *reſpondere*, et eorum *menſuris*, vt omnino doleam, miſceri et officere illi vulgarem de attractionibus litem. Placet induſtria Viri praeſtantisſimi, qua hypotheſin ſuam ſic inſtruxit, vt ea data ſequantur, quae debent. Diſplicet imbecillitas mea, qua attractionem proprie dictam in corporibus concipere non datur. Sed fortaſſis ſolui hoc vinculo poſſumus indulgente Auctore egregio. Quid ſi hoc ſolum velit: Attractionem aquae ad vitrum eſſe phaenomenon generale, quo poſito ſpecialia ordine ſuo omnia ſequantur; ipſius vero attractionis cauſſam dari corpoream, ſed nobis incognitam. Nihil in ea excuſatione indignum eſt hypotheſi, nihil a regulis philoſophandi alienum. Nimirum, vbi plenam dare cauſſarum analyſin non licet, ſubſiſtendum

eſt in cauſſa proxima ſpeciali, aliquando etiam in phaenomeno generali.

LI. Cum haec prima vice expenderem, viſum eſt dari phaenomenon aliud, quod *impediat fortiorem* aquae ad vitrum, quam ad ſeipſam concedi attractionem, et fortiorem mercurii ad ſe, quam ad vitrum.

Phaen. 46 46. Cum aqua trans tubum ſugitur gracilem, idemque madidus horizontaliter reponitur; obſeruare licet, *particulas aquae* lateribus fiſtulae internis adhaerentes, ſenſim ſenſimque *coire* in *cylindrulos* aqueos, totam internam cauitatem replentes; terminari illos vero ſuperficiebus concauis.

Ex aduerſo mercurius, a quo coitum in bullulas expectaueram, non coire, ſed longa ſerie continuatus inordinate in tubo ampliore viſus eſt quieſcere. Id maiorem vitri attractionem oſtendiſſet ratione mercurii, niſi poſtmodum animaduertiſſem, impurum eum eſſe, qua[illegible]lem diducere etiam ſuper charta vel ligno [illegible]

47. 47. *Mercurium* puriorem in fiſtula etiam anguſtiori coire primo in *ſphaerulas*, et, ſi illae augeantur, in columnulas cylindricas, ſuperficie autem conuexa terminatas manifeſte patuit repetitis tentaminibus.

Poſtremum hoc plane conuenit *Iurinianae* hypotheſi, neque phaenomenon aquae penitus aduerſatur, ſi huc transferas, quod alia occaſione *Vir ingenioſus* monuit, cum de gutta mercurii inter duas aquae ſuperficies conſtituta differeret. Ait enim

48 48. Si guttulam mercurialem ex oppoſitis lateribus contingas binis tubulis vitreis, attractionem oriri inter vitra

vitra et mercurium ; ſic, vt diductis paulisper tubulis figura guttulae ſphaerica in oblongam tranſeat, ſequente vitri latera mercurio ;

Non, quia fortius attrahitur *ceteris paribus* a vitro mercurius, quam a ſeipſo; ſed quia maior eſt numerus particularum mercurii, quae vitrum contingunt, quam earum, quae a ſe inuicem recedunt. Hic enim maior non eſt, quam pro differentia ſuperficiei genitae ex mutatione figurae prioris ; ille autem reſpondet integrae ſuperficiei planae, quae vitrum contingit. v. l. c. p. 435. Si hoc, aut ſimile aliquid applicari ad aquam in phaenomeno noſtro 46. poteſt, ſalua eſt etiam hac parte ſententia.

LII. *Difficillimum* fortaſſis in omni ſententia phaenomenon eſt, ipſi, quem commendauimus, Auctori ſolicite expenſum, illud, quod §. 20. ph. 22. recenſuimus: namque non ſolum in aere, ſed

Etiam *in vacuo* ſuccedit experimentum l. c. *Phaen.* 49 memoratum. Sit tubus inaequaliter amplus, et immergatur in aquam aere ſuo purgatam nonnihil profundius, madefiat ſuperne tubulus in vacuo, et extrahatur aliquantum: apparebit altitudinem vtriusque aquae ſimul ſumtam reſpondere altitudini, quae conuenit tubulo anguſtiori, et multo maiorem eſſe, quam quae ampliori debetur.

Hic vero artis eſt, oſtendere cauſſam facti. Si tubulus eſſet *cylindricus* totus, facile negotium foret; dici enim poſſet, actionem peripheriae D deſtrui per actionem peripheriae C, adeoque rem perinde eſſe, ac ſi co- *Fig. XIII.*

lumella AD et BC eſſent contiguae: Fateor tamen etiam hic quaeri poſſe, annon ſimiliter dicere liceat, actionem peripheriae A deſtrui per actionem peripheriae D, adeoque columellam AD, *ſaltem in vacuo*, debere deſcendere; quodſi enim aer occupat locum DE, poteſt peripheria C ſuſtentare columellam AD, mediante aeris interpoſitu.

LIII. Pro tubis *inaequabilibus* difficilior res eſt etiam *in ipſo aere*. Nihil poteſt eſſe amoenius explicatione *Iuriniana*, quam p. 429. libri citati legimus. Reducit non ſine artificio hunc caſum ad alium faciliorem, quo non interrupta eſt aere intermedio columna aquae anguſtior et amplior. Preſſioni ſcil. atmoſphaerae in baſin BC opponitur cum pondere aquae in FGCB etiam elater aeris inter DFG concluſi. Minor itaque eſt hic elater quam grauitas atmoſphaerae pro ratione altitudinis FB. Idem vero opponitur etiam, et cum attractione peripheriae in A aequiualet grauitati aeris externi ſuper A prementis: itaque haec attractio aequatur preſſioni aquae ad altitudinem FB, et ſuper baſi A, eleuatae. Egregie vero iſta omnia, ſupereſt *ſcrupulus* tantum. Cur nulla fit mentio *peripheriae inferioris* D guttulae AD? annon dici poteſt, quantum guttula A ſurſum trahitur a contactu peripheriae ſuperioris, tantundem trahi illam quoque deorſum a contactu inferioris: deſtruere igitur ſe inuicem contrarias tractiones, et rem omnem reſolui in peripheriam FG, quae non ſufficiat altitudini FB? An omnino negligi debet haec ſuperficies D deorſum trahens? et, cur eo caſu altitudo aquae, non ſit maior,

Fig. XIII

ob

ob duas ſuperficies attrahentes in A et in FG? An peripheria FG ſurſum trahens, et peripheria D deorſum vrgens ſemper ſibi aequiualent? et quae cauſſa eſt, vt amplior FG non pro ſua diametro trahat, ſed pro altera in D, aut vice verſa? An etiam hic recte dicitur, quod §. 49. dictum eſt? momenta harum peripheriarum trahentium eſſe aequalia, et contraria; itaque deſtrui tractionem alteram ab altera: fieri hic tractionem pro ſuprema peripheria, non obſtante, quod fluidum aqueum aereo interruptum ſit; vti in vulgari hydroſtatica preſſio fit pro infima ſuperficie, etſi diuerſa ſibi incumbant fluida.

LIV. Notari tamen, ſi recte diuinaui, etiam hoc debet, aeris operam huic expoſitioni neceſſariam eſſe. *Quid* igitur factu opus, cum *in vacuo* experimenta ſuccedunt eadem? *Hic aqua haeret*: et haeret pertinacius, quam velles. Nondum licuit repetere experimentum Viri Clariſſimi, ſed memorabilius eſt, quam vt hic omitti poſſit.

50. Aſſumto tubo, cuius longitudo erat 35. poll. diameter cauitatis $\frac{1}{4}$ poll. et ſummitas in tubulum vere capillarem diducta; impleuit tubulum aqua ab aere ſuo perpurgata, et vidit omnem hanc aquam ſuſpendi in vacuo, vt ante diximus phaen 49. Hic vero iuſtum eſt requirere, quae ſuſpenſionis iſtius oeconomia ſit? *Phaen.* 50.

Non deeſt ſibi aut ſententiae ſuae ingenioſus Auctor. Accipe verba: „optima, quae mihi ſuccurrit, ad hanc diffi-„ cultatem *reſponſio* haec eſt: cohaeſionem inter aquam,„ fiſtulae ſupremae capillaris, et tubi inferioris, ſufficere „

„ad ſuſtentandum pondus columnae ſuſpenſae. Sed quo-
„usque haec cohaeſio dependeat a preſſione alicuius me-
„dii ſubtilis adeo, vt penetrare campanam poſſit, id ve-
„ro meretur conſiderationem. Etſi enim eiusmodi me
„dium non minus aquae quam vitri poros peruadat, a-
„git tamen integra ſua preſſione in particulas, vt ſic di-
„cam, ſolidas ſuperficiei aquae in ciſterna contentae:
„cum ex aduerſo omnes illae aquae in tubo particulae,
„quae directe ſubiacent particulis aquae ſuperioribus (*in*
„*capillari fiſtula contentis*) per easdem tutae redduntur
„ab iſthac preſſione. Conſequenter preſſio huius medii
„in ſuperficiem quamcunque tubuli amplioris ſub capilla-
„ri fiſtula poſiti minor erit preſſione eiusdem medii in
„ſuperficiem priori aequalem, ſed in vaſe ampliore as-
„ſumtam; adeo vt differentia harum preſſionum ſuſten-
„tet columnam aquae in tubulo contentam.„

LV. Equidem dari fluidum premens aere ſubtilius, cui trans vitrum via pateat, multa nobis phaenomena perſuadent, quorum partem loco citato videas ab ipſo Viro Egregio allegatam. Vnum me habet anxium.
Fig.X II Non poteſt hoc medio vacuum concipi ſpatium DFG; quia vitrum peruadit. Quodſi vero plenum eſt eo medio ſpatium DFG, non video, quomodo preſſio eius in ſuperficiem FG impediatur ab aqua fiſtulae capillari AD incluſa? Cur fluidum hoc ſubtile non agit in totam ſuperficiem FG, et tota ſua preſſionis vi, ſi contiguum eſt huic ſuperficiei non minus, quam alteri in ciſterna ſumtae? Facilius feram, ab eiusmodi fluido deriuari effectum ſuſpenſionis mercurii aere ſuo purgati in tubo Barome-

metrico vltra conſuetam altitudinem, ad vsque 70, vel 75 pollices, quod phaenomenon Clar. Autori placuit huc referre: Dicerem eo caſu, particulas mercurii vitro ſuperne contiguas defendi a vitreis illis contra preſſionem huius fluidi; vnde etiam accidat, vt mercurius leui ſuccuſſione a ſupremo tubuli contactu ſemel auulſus nonniſi ad ordinariam ſuſtentetur altitudinem; nimirum pro mea coniectatione, hoc fluidum, vbi ſemel tubum intrauit aliqua ſui copia, aequaliter ſupremam mercurii ſuperficiem in tubulo vrget, ac infimam in vaſe ampliore aeri expoſitam. Quid ergo, *inquis*, de phaenomeno hactenus memorato fiet? commendo illud repetito Autorum examini.

LVI. Iſta vero de praecipuis phaenomenorum explicationibus. Vidi *plures*, quas nolim examinare; alias, quoniam nimis commentitiae ſunt; alias, quoniam minus ſpecialiter expoſitae ab Auctoribus ſuis. Quid *mihi* videatur, exponam diſſertatione *ſecunda*, quae plura etiam de his tubulis experimenta continebit, et concluſiones aliquot eisdem ſuperſtruet. Dum id in *ſequenti Commentariorum Volumine* fiat, cogitabunt Lectores, *fungi* me *vice cotis*, *acutum reddere quae ferrum ſolet*, *exſors ipſa ſecandi.*

DE

DE GLANDVLIS CORDIS

Auctore

Io. Georg. Du Vernoi.

M. Nov. 1727.

POſt Elephanti vias chyliferas, quarum in Commentariis Academiae ad An. 1726. deſcriptio data fuit, alterum nobile phaenomenum, quod in huius aeque ac aliorum Animantium diſſectionibus a nemine viſum eſt nomenque forte rarae acquiſitionis aliquando obtinebit, hac vice exponendum eſt. Si in genere Elephantorum diſſectiones rariſſimae ſunt, id multo magis de illis dicendum eſt, ad quas diligentia, tempus ſumtusque neceſſarii tanquam ad diuitem fodinam inſumti ſunt. Propterea, qui aliquando tale munus ſuſcepturi ſunt, ſciant, non facilem, ſicuti initio apparet, in haecce antra ſeu ſepulchra deſcenſum eſſe, vbi forte parum fauſta ad longum tempus pernicialem auram inſpirare ac id ſollicite curare oportet, vt poſtquam magno molimine ſolutae et extractae ordinataeque fuere partes ſingulae, (id autem molis ratione, quae terribilis eſt, factu quam dictu difficilius eſt, ſiquidem ex ſolis viſceribus oſſibusque vidimus haud mediocrem cymbam totam repletam fuiſſe,) hae inquam partes plurium menſium ſpatio incorruptae floridae et ſucculentae conſeruentur, retineantque toto illo tempore eam, quam ab initio obtinebant, perfectionem integritatemque. Hiſce ſub-

ſubſidiis omnes difficultates vincere metamque optatam attingere fas eſt.

Incredibile ſtatim videtur, quod quis circa pericardii mediaſtinique exiſtentiam, in re tam euidenti et facili, ad quam oculis tantum apertis opus eſt, lapſum committere poſſit: Nam procliue eſt, quando pectus apertum eſt, videre aut palpare nudum ſit nec ne cordis parenchyma. Quanquam nulla difficultas in eo appareat, ſors Anatomicis ſaepe contraria tulit, vt inter eos pericardii Elephantini notio adhuc incerta eſſet, ſicuti Acta Edimburgenſia *Cl. Moulins*, noſtraque declarant. Aliam itaque Elephanti diſſectionem ad hancce litem componendam exſpectare ſatius eſt, quam leuiter ſupponere, a vitio primae conformationis huncce mihi oblatum defectum pericardii originem forte trahere, ſicuti exempla quorundam animalium ac hominum aliquando viſa fidem faciunt. *Elephanti pericardium non obſeruatum.*

Ad cordis Elephantini maſſam ſimul ac vaſorum amplitudinem iure meritoque obſtupeſcendum eſt, ſicuti tabulae ſequentis inſpectio comprobat. *Dimenſiones cordis et vaſorum.*

Pondus cordis a ſanguine polypisque mundati 25. lb. Ruſſic. aequabat. *T. XVIII*

Eiusdem circumf.	poll. 26.	
A baſi ad conum longit.	15.	
Ventriculi dextri longit. int.	10.	4. lin.
Eiusdem ſemicircumf. ſuper.	12.	2. lin.
- - ſemicircumf. inf.	7.	
- - craſſities		5. lin.
Ventriculi ſiniſtri longitudo int.	13.	
Eiusdem ſemicircumf. ſuper.	9.	1. lin.

- - ſemicircumf. inf.	poll. 6.	2. lin.
- - craſſities		11. lin.
Septi craſſities		16 l.
Auriculae dextrae longit.	3.	6. l.
Eiusd. ſemicirc.		13. lin.
Auriculae ſiniſtrae longitudo	3.	9. l.
Eiusdem ſemicirc.		11. lin.
Arteriae magnae diameter inter.	2.	2. l.
Eiusdem craſſities		$3\frac{1}{2}$. lin.
Arteriae pulmon. diameter int.	2.	8. l.
Eiusdem craſſities		$2\frac{1}{2}$ l.
Venae pulmon. diameter interior	2.	3. l.
Eiusdem craſſities		2. l.
Venae cauae aſcend. diameter int.	4.	2. l.
Eiusdem craſſities		2. l.
Venae cauae deſcend. diameter int.	3.	
Eiusd. craſſities		2. l.

Caetera, vti ſunt,propria Vaſa Cordis, Valvulae, Pinguedo,Nerui, ea magnitudine et copia erant,qua ad veram nobiliſſimi huius viſceris naturam rimandam aptior toto mundo inueniri vix poteſt.

Sententia Eruditorum de natura et proprietatibus cordis quaenam sit?

Eruditorum, fateor, de Corde ſpeculationes in ſe ſpectatae a vero tanto magis recedunt, quo notio omnium eius receſſuum magis ignota ac imperfecta ſemper fuit. Imperfectam notionem eam voco, quae vna tantum ſeu particulari proprietate nititur, cuiusmodi de ventriculo, de inteſtinis, liene, glandulis, vtero etc. a doctiſſimis viris reiectae et deriſae ſunt notiones, poſtquam dictarum partium maturatae magis ac completae deſcriptiones

nes

nes editae ſunt. Tota itaque cognitio cordis ad tria capita fere reducitur. 1. Quod vna homogenea maſſa conſtet, ſicuti muſculus. 2. Quod in motu ſolo operationes eius conſiſtant, et 3. quod ventriculi nec non ſociae auriculae nihil aliud ſint, quam ſimplices cauitates nullum in fluida praeterlabentia ius peculiare ſeu proprium obtinentes, adeoque pura receptacula.

Dubia aduerſus doctrinam receptam proponuntur.

Graues autem cauſae ſunt, quae ad hancce doctrinam in dubium reuocandam me impellunt, quae vt ad ſenſum qua licet perſpicuitate exponantur, diuerſorum animaliumCorda a prima ſua conſtitutione vsque ad perfectionis, quam in adultis conſequuntur, gradum perſcrutari operae pretium eſt. Ac primum, in foetus exordio, quum partium prima ſtamina formari incipiunt, pulchra obſeruatio ſententiam noſtram egregie confirmans huc trahenda eſt: Totum Cor nihil aliud, quam veſiculam puram cryſtallinam nudam exhibet, cuius tamen alterna turgentia ac concidentia ſenſibilis eſt; Huic poſtmodum veſiculae, parenchyma ſeu cortex ſuperoritur, ſicutiNatura in nonnullis partibus, organum purificationi aut transcolationi alicuius fluidi inſeruiens, firmiore et craſſiore tegumento inueſtire ſolet. Ex eo quid inferendum ſit luculenter apparet: Duplex nimirum ſeu mixtum organum, vnum interius, cuius exiſtentia actioque anterior eſt, et cum vita incipit, laeſionesque mortiferae ſunt; Alterum, exterius, ſolidum ac denſum, volumen ſeu maſſam cordis efficiens, cuius vulnera teſte experientia minus periculoſa ſunt. Sed ne quis imaginationi, quae rebus quidem anatomicis non infrequenter ſe immiſcet, hancce for-

Cor ex duabus partibus valde diuerſis conſtat.

te opinionem tribuat, non aliter cuiuslibet cordis ſtatus ſeu fabrica, quoties ſatis diligentiae adhibetur, quam praedicta forma oculis apparitura eſt, mixta nimirum ex duplici organo, in quod ſponte ſua reſolui ſe patitur. Et hoc quidem, cum ex ſimplici intuitu exterioris interiorisque ſtructuræ cordis ſatis clare intelligitur, tum ex contemplatione oſſium illuſtratur, ſiquidem vna ex parte, quae corticalis eſt, ſimulque duriſſima, motus et firmitatis inſtrumenta ſunt: Altera autem, medullae laboratoria magno artificio conſtructa, iucundaque viſui exiſtunt. Cur rogo in oſſe ſolummodo, non aeque in corde, idem diſcrimen a natura conſtitutum, quodque non minus in eo palpabile ac perſpicuum eſt agnoſcimus? Aut ſi agnoſcimus, cur non inculcamus ſerio? etiamſi vſus forte adhuc fuerit occultus: Sufficit enim, ſi ſolummodo praedicta fabricæ differentia vera ſit et ſatis conſpicua. Hanc vti dictum eſt, primo intuitu obſeruare ac digito monſtrare fas eſt: Nam quemadmodum pro fibroſo corpore ſeu lacertorum faſciculo conuexa ſeu exterior cordis ſubſtantia optimo iure habetur, iusque illud eousque extendi, quousque directio faciesque lacertorum continuata oſtendi poteſt et viceuerſa, ſic architecturam iſtam vltra, in caua cordis vsque protendere nimium eſt: Non quidem ac ſi ad motum cordis, chylique ac ſanguinis circuitum, parietes vtrinque conſtipati ac ſolidi minus apti et conuenientes forent: Contrarium enim perſpicue, cum ex contemplatione Aortae, tum quoque exemplis mechanicis patet, ſiquidem ad fortiorem arctationem, latera quo ſtrictiora et compactiora ſunt, eo aptiora eſſe credun-

Illuſtratur exemplo oſſium.

Exterioris ſeu corticalis ſubſtantiae cordis ſtructura.

duntur. Ecce autem,loco parietum compactorum, ſpongioſos, cauernoſos, vbique terebratos parietes? Argumento,ad contractionem eos minus inſeruire, quam vulgo aſſeueratur: Ecce fiſtularum, meatuum, fovearum prodigioſam multitudinem, breuiter, compagem ſingularem, diuerſamque ab exteriori, quam ſatis dilucide verbis exprimere haud poſſibile eſt,cuius tamen, opinor, et reliquarum proprietatum, quas in excellenti hac cordis regione et ſpeciatim in membrana interiori,ſedulitas anatomica detexit, a nemine praetexi poteſt ignorantiae cauſa.

Interiorum receſſuum cordis ſtructura. Vulgaris ſententia de huius ſtructurae vſu refutatur.

Vt hancce modo citatam cordis fabricam, prout naturae conuenit,perſpectam habeamus, illud diligenter obſeruandum eſt, quod in ſolius membranae internae gratiam, tota illa admirabilis compages comparata ſit; Equidem huius membranae ea conditio eſt, vt minima ſui portione ventriculorum cauitatem inueſtiat, maxima vero rimas, anfractus, ſinusque omnes antea memoratos,vna cum minoribus intra hoſce latentibus, quaquauerſum peruadat, ſuperficiemque ampliſſimam hac ratione obtineat: In hunc finem, in fiſtulas innumerabiles ſeu proceſſus veluti digitos chirothecae excauata et diuiſa eſt: Hi poſtmodum loculos, ceu vaginas aptatas, quibus firmiter agglutinati ſunt, ſubingredientes, mox novas fiſtulas haeque alias progerminant inuicem concatenatas et continuas, ac per vniuerſam loculorum, cum quibus eandem directionem terminationemque nanciſcuntur, ſyluam diſperſas: Hi loculi mirum in modum multiplicati, non ſolum in ventriculorum ſuperficie Verum etiam in plures ordines ſeu ſtrata ſibi in-

Noua interioris ſtructurae cordis,inſpecie membranae deſcriptio.

 uicem

uicem ſuccedentia ſic diſtributi ſunt, vt ſub vna loculorum ſerie, mox altera, poſthanc tertia in conſpectum veniat, fereque tertia craſſitiei cordis pars huicce meatuum diſpoſitioni inſeruiat, vnde admodum fungoſa ac ſpongioſa euadit: Nam id a ſingulari diſpoſitione ac tendentia horum meatuum potiſſimum prouenit, quae talis eſt, vt eorum terminus aeque ac initium ſimul reſpiciant cavum ventriculorum, vnusque in alium, ab imo vsque ad ſummum, vtraque ſua extremitate, per continuatam inoſculationem ſeſe inſinuet, vnde prodigioſa foſſularum multitudo, ex eaque rara ac laxa ſubſtantia emergit. Vltimo, annotatione dignum eſt, quod in tanto numero meatuum, omnes vnam tendentiam obſeruent, quantum quidem in variis animantibus obſeruare potui: Nullos a cauitate ad medium vel extimam ſuperficiem penetrantes, verum ſic diſpoſitos vidi, vt in longum latumque protenſi, ad ſuperficiem internam paralleli eſſent.

An membrana cordis interior peruia ſit? inquiritur.

Hiſce praemiſſis, ad alias proprietates in membrana cordis interiore contemplandas progredior, inter quas ſummorum Virorum autoritate haec collocata eſt, quod per eam veluti per cribrum naturaliter ſanguinis depluuium in cauitates cordis fiat, hiantibus eum in finem vaſculorum extremitatibus, quas tamen oculis percipere graue eſt. vid. *Nouvelles decouvertes ſur le coeur. Traité nouveau de la ſtructure et des cauſes du mouvement naturel du coeur par Mr. Raymond Vieuſſens.* in quo certe tractatu Vir ſummus ita ſe geſſit, vt nemo non admiretur: Quae enim de cordis partiumque eius conſtituentium textura

tura, proprietatibus, muniisque, in ſpecie, de ſingulari inceſſu arteriarum venarumque coronariarum in eo enarrantur, ea absque ingenti animi voluptate ac vtilitate legi non poſſunt, vt adeo Triumphum cordis iure meritoque appellares. Quod itaque vaſa huius membranae ſanguinea attinet, membranae ſuperficiem internam terminantis indiſpenſabilis functio eſſe videtur, omnem in cordis ſubſtantia diffuſum ſanguinem, cuius per vaſa coronaria exteriorem membranam perreptantia ingens copia ſine intermiſſione affluit, in ſinu ſuo colligere, quia vaſorum progreſſus hic ſiſtitur ac interrumpitur, vti conſideranti patet: In huncce finem, perampla ſuperficie ſummaque tenuitate haec membrana inſtructa eſt, vti ſupra diximus, ad praedictam ſanguinis eo tendentis copiam continendam: Quare huius intuitu (vt calorem cordis ſeu flammulam vitalem hic non reſuſcitem) ad minimum concedendum eſt, membranam cordis interiorem inſolita humorum quantitate praegrauatam et ſaturatam eſſe, attento incredibili numero vaſorum, quae ex omnibus cordis locis adueniunt: Ex foueis enim, tanquam ex teſtis floralibus, quaedam propagines arbuſcula mentientes prodire obſeruantur, haeque in egreſſu ſuo mirum in modum luxuriantes, modo ad latera fouearum, modo circa columnas chordasque, capreolorum inſtar, variis modis implicantur, quemadmodum multiplex experientia teſtatur.

Functio praedictae membranae eſt, omnem in ſubſtantia cordis diffuſum ſanguinem in ſinu ſuo colligere.

Eiusdem membranae vaſa ſanguinea. Lit. A. A. A. A.

Vnum ſolummodo reſtat, an vere et naturaliter ductus ſeu pori in praedicta membrana adſint, per quos ſanguis aut ſuccus qualiscunque in ventriculos cordis exprimi-

primitur, prout fama huius noui inuenti initio ſecu-li increbuit: Inuentum ſane, multis egregiis meditationibus anſam praebens, quo pulchrius, nobiliusque vix ac ne vix excogitari poteſt. Quam ob rem ſententiam meam vt exponam, prius experimenta affero, ex quibus illa originem ſimul ac fundamentum mutuat: Experimenta, vti ſpero, beneuoli lectores cogitabunt, minus errori et fraudi obnoxia, perſpicua, veritatisque notam ſecum aduehentia: Nam certum eſt, quod experimentum in minutis animalculis ſaepe incertum ac fallax, in maioribus e contra, in quibus ſenſuum ſuffragia minus impedita ſunt, ſine dubio et ambiguitate inſtitui poſſint. Perluſtratis itaque cordis Elephantini, de quo ſupra mentio iniecta fuit, partibus maxime obuiis, exempli gratia foueae, quarum nonnullae pollicis diametrum aequabant, columnae pollicem latae, valuulae peramplae et craſſae ſine globulis tamen ſeu corpuſculis, in ſigmoidearum limbo deficientibus, etc. Primum experimentum hoc fuit, videre, an poſt expurgationem ac elotionem cordis, quod antea exſangue pallidumque apparebat, deterſa prius omni humiditate aduentitia, ſanguis per compreſſionem cordis arteriarumque et venarum coronariarum, quarum amplitudo maxima erat, e membranae poris exprimi poſſet; ſed conatus irritus fuit. Poſt haec, vnum ventriculum cordis aliquamdiu aqua affuſa maceraui, ad tollendum, ſi poſſibile eſſet, omne genus impedimentorum; Alter, vti erat, intactus permanſit; cauitas vtriusque aperta et diducta fuit, vt quicquid fieret intus, ſtatim in conſpectum veniat. Hinc aquam flauo colore tinctam

Experimentum I.

et

et tepidam per venoſa aeque ac arterioſa vaſa ad vtrumque ventriculum tendentia diuerſis temporibus, omiſſa ligatura; hocque ſecundum fuit experimentum, in quo etſi iniectiones diligenter continuatae ac reiteratae eſſent, ſucceſſus tamen defuit. In vna enim aeque ac in altera cauitate, effluxus per poros membranae, in quam defixos oculos tenebam, erat imperceptibilis; e conuerſo aqua per venam citato curſu redibat. Tertium experimentum praememorato ſimile fuit, excepta ſola ligatura, quam hic neceſſariam eſſe duxi, ſicuti mox euentus docuit: Nam quum in praecedente experimento, praeter refluxum aquae per venam, mutatio nulla in ſuperficie interiori conſecuta ſit, nunc in quibusdam locis membranae praedictam ſuperficiem inueſtientis, exilia vaſcula comparere incipiebant, quae adeo continuata aquarum iniectione increſcendo, intra breue tempus per vniuerſum ambitum conſpicua facta ſunt, absque tamen aquae ſenſibili effluxu aut humiditatis apparentia. Pro quarto experimento, in ſpem melioris fortunae, aquam non adhibui; ſed ſpiritum coloratum; Deinde mercurium prius per alutam traiectum; Poſtremo flatum. Succesſus tamen nihilo melior fuit, resque in eodem ſtatu permanebant. Attonitus quare hic omnes mei conatus irriti, in minoribus contra animantibus tranſitus liquorum facilis eſſet, ſortem meam infelicem deplorare coepi, experimentis iſtis valedicturus, ne alia aeque neceſſaria per obſtinationem meam neglecta peſſumdarentur. Quum poſtero die, ſub aliis negotiis, cor mihi obuium factum eſſet, ſemel adhuc curaui, vt iniecta ☿ quantitate

Experimentum 2.

Experimentum 3.

Experimentum 4.

Experimentum 5. ſufficiente, id quod factum eſt in ventriculo macerato, vaſcula, vti decet, ſatis turgida redderentur, hisque praeter flatum, compreſſionem manu factam ſuperaddidi, eamque ſolummodo blandam, citra violentiam. Accidit non diu poſt dictam encheiriſin, quum ſpes nulla ferme reſidua eſſet, vt ex quibusdam foſſis, globuli mercuriales, ex aliis humores, in cauitatem vtramque ſubito exilirent, de quo vehementer laetatus ſum.

Praedicta experimenta improbantur. Sed quia amor ardorque experiundi, veritatemque quocunque pretio extorquendi, nos eo ſaepe abripit, vt triumphum ante victoriam canamus, quando ex ſolo euentu, ſine examine experimentorum, de naturae operibus iudicium ferimus, incertus animi adhuc haereo, quid concludendum ſit, poſtqnam adeo aegre et tarde, et poſt tantas vexationes eruptio liquoris facta ſit. Non inficior, liquores in cordis caua vias tandem inueniſſe; ſed neſcio, quid effluxum in principio et vsque ad vaſculorum ſummam diſtenſionem retardare potuit. Magna forte viarum anguſtia? concedo, ſed caeteris paribus, minor eſſe debebat in Elephanto, quam in Oue difficultas; Deinde ſaepe accidit, vt tunica membranam aut tubulum efformans, a variis cauſis praeternaturalibus, ſoluta eius compage, eum in ſtatum perueniat, vt cedat contranitenti fluido, quod poſtea per rimas aut hiatus, modo ſenſibiles modo inſenſibiles, praeter naturae inſtitutum elabitur. Pari ratione, de noſtra membrana cordis, vaſculisque intertextis cogitandum eſt: Nam, quum huius membranae minima ſit reſiſtentia propter ſummam eius mollitiem, idque in minoribus adhuc magis quam in gran-

grandioribus animantibus, periculoſum erit, rem cum ipſa habere, quoniam aucta mollitie et plenitudine vaſculorum, niſum perferre amplius nequit, eamque ob cauſam ſuccumbens, in ſpeciem filtri commutatur. Adde, quod ruptura vel excoriatio in nonnullis locis ſenſibilis fuerit. Tantum de membranae interioris cordis vaſis ſanguiferis.

Glandulae cordis primum inuentae.

Nunc inſignis proprietatis, quae inopinato in eadem Elephanti diſſectione oblata eſt, mentio poſtremo facienda eſt, videlicet, exiguarum glandularum ad praefatam membranam pertinentium. Dixi inauditam proprietatem, quia cum morbo et ſine morbo defunctorum Elephantorum, aliorumque animantium hominumque diſſectiones, eam ſilentio praetermittunt: Etenim, quum haud maiorem cordi immunitatem a morbis conceſſam eſſe quam caeteris partibus, omniaque haſce afficientia mala, cordi communia eſſe conſtet, vt primum in haecce corpuſcula incidi, ſtatim ambigebam, vtrum impreſſioni ſeu characteri vitioſo imputandum ſit phaenomenum nec ne: Quare ad veram huius inuenti cauſam inueniendam, cor eiusque ſingulas partes internas et externas diligenter examinabam, ſpe fore, vt vitium clarius et certius innoteſceret; Aſt incaſſum: Pallore enim excepto, concretionibusque lardo ſimilibus, maximis, e cordis ventriculis vsque ad vaſorum cauitates protenſis, reliqua ſatis bene valere viſa ſunt, nullo ſenſibili vitio, nulla inflammatione aut cauſtica malignitate extus vel intus apparente; E contrario, notae glandularum ſeu character hiſce proprius adeo manifeſtus erat, vt de earum exiſtentia amplius non dubi-

Cor an obnoxium ſit morbis?

tans, potiſſima nunc cura eo conuerſa ſit, vt noui huius inuenti notitiam accuratam, vna cum delineatione bona in vſum anatomiae acquirerem.

Deſcriptio glandularum cordis. Lit. BBB BBB.

Harum glandularum obſeruatio ſine microſcopii ope facta eſt: Eae enim in ſuperficie vtriusque cauitatis cordis, intuentium oculis ſtatim apparuere, veluti Tabula XVIII. exhibet ſuntque tubercula, caput aciculae aequantia, albicantia, quae propter membranam inſtar vitri transparentem inconſpicua eſſe nequeunt, etſi tumorem perexiguum efficiant. Pone hancce membranam, cui agglutinata ſunt, veluti incarcerata et compreſſa iacent, ſpeciemque glandularum ſolitariarum conſtituunt, quia non coniugatim, ſed in diuerſa a ſe inuicem diſtantia hinc inde diſpoſita ſunt. Quamobrem, quid initio de hacce raritate ſeu ſterilitate, pro tam vaſta ſuperficie, in qua nimis viſae ſunt disgregatae, coniicerem, incertus fui. Numerus enim amplitudini cauitatis minus reſpondebat. Tandem cogitatio incidit foſſularum, in quibus nonimprobabile viſum fuit, naturam forte aequalem numerum talium glandularum collocaſſe, ſicuti alias in occultandis ſuis operibus non infrequenter hocce artificio vti ſolet, quemadmodum in glandulis intra cauernulas ſinuum durae matris contentis, quas vix ac ne vix eruere fas eſt, conſpicimus. De facto, plures eiusdem generis glandulae praecedentibus perfecte ſimiles, in praefatis foſſulis inuentae ſunt, prout diſſectio comprobauit, neque alia lege eas diſpoſitas vidi, quam vt ſunt illae, nimirum diſcretae et ſolitariae: Duas enim ſimul iunctas obſeruare non potui. Porro memini, in dextro ventriculo maiorem quam laeuo earum fre-

Lit. CCCC

Plures glandulae in dextra cauitate inuentae.

frequentiam ſeſe manifeſtaſſe, cuius diſcriminis cauſa, etſi forte ſolus Deus nouerit, ex iis, quae de vſu harum glandularum, in fine expoſiturus ſum, diuinanda eſt.

Earum notae. externae. De caetero in colore, magnitudine, diſtributione, nullum ratione ventriculorum diſcrimen internoſcere potui, quamquam haud diſſimulandum ſit, nonnullas prae aliis minus compreſſas ac magis faſtigiatas apparuiſſe, vnde hanc ſpem concipiebam, fore, vt ſuccum per leuem expreſſionem obtinerem, ex quo ipſius naturam cognoſcere poſſem; At ſucceſſus defuit, idque varias ob cauſas contingere potuit, vti experientia teſtatur: Vidi eodem tempore (non tamen in omnibus,) in medio apicis, punctum exiguum nigricans, quod, vti puto, folliculi glandulosi, vel accuratius loquendo, ductus excretorii in membrana deſinentis verum orificium ſeu emiſſarium eſt, quod *et orificium* in omnibus in quibus conſpicuum erat, vniformem faciem obtinebat: Subſtantia autem ſeu corpus ipſum glandulae, albicans erat, firmitatem ſeu conſiſtentiam, quam conſimiles glandulae habere ſolent, adeoque inſtar earum, quae in durae matris receptaculis, aut in inteſtino continentur, obtinens. Quali conformatione ſeu compage inſtructae ſint praedictae glandulae, propter earum paruam molem ſenſu aſſequi non licuit. Inutiles ad hunc ſcopum fuere adhibitae iniectiones, ſectiones, vitra melioris notae, quibus poſtquam ſatis diu me exercuiſſem, nihilque praeter lucidam, et nebulae ſimilem ſubſtantiam, in qua indiſtinctum et confuſum quoddam chaos apparuit, detexiſſem, nouo hoc exemplo edoctus ſum, in maximis aeque ac minimis animantibus, *aequa lance Naturam ſuae*

Interna compages inconſpicua

 micro-

micrologiae munera contuliſſe, quae forte mortalium oculis nunquam patebunt.

Cur in aliis animantibus glandulae cordis inconſpicuae

Haec ſunt, quae experientia duce, ad cordis cognitionem promouendam, in Elephanti diſſectione, nobis non infauſta ſorte oblata ſunt. Sed, ais, ex vno particulari exemplo nihil concludi poteſt, concedo: Neque is ſum qui talem auctoritatem mihi tribuo. Interim, quum in omnibus animantibus reliqua bene concordent, ſolaque forſitan magnitudinis ratio hoc in caſu conſideranda ſit, iuſta eſt cauſa accuſandi obſcuritatem in aliis animantibus, potius quam abſentiam realem: Addo non extraordinarium eſſe, glandulas conſpicere in organis analogis v. gr. in ſinubus durae matris. Propterea miſſis ambagibus, concludere fas eſt, praeter impulſum cordis, et transfuſionem ſanguinis per pulmones, et reliquas partes corporis, aliam cordi inſitam eſſe facultatem, prout ſummi Philoſophi et Medici olim ſolo rationis lumine coniectati ſunt. Hancce facultatem conſidero, tanquam ſummum naturae arcanum, quo nullum implicatius et obſcurius eſſe poteſt: Hunc de eo conceptum mihi formo. A quacunque cauſa motus cordis in vitae primordiis ſuſcitetur, neceſſarium eſt, vt vi huius impulſus, ad teneram membranam in cor abituram ante omnes alias partes pertingente, glandulae cordis eodem temporis momento exſuſcitatae et viuificatae, paululumque compreſſae, virtutem ſuam prima vice, et ante omnes totius corporis glandulas exerceant, quod ex earum ſitu patet. Ante momentum, quo illa prima functio glandularia perficitur, in corde et ductibus ſanguineis, ſucci purpurei nullum veſtigium percipere licet; E conuerſo, limpida, et cryſtallina lympha ſolummodo apparet,

Functio earum glandularum proponitur. Scilicet ſanguinem purum ſecernere.

paret, quae foſſularum loculorumque cauitates replet. Pulmonis aliarumque partium functiones, veluti emortuae, ius in hancce lympham haud exercent. Ex ipſa denique lympha, ceu materia, purpurae originem deriuare minus etiam probabile eſt, quoniam naturam alienam, lympha propria virtute ſibi dare non poteſt. Conſideretur enim in homine, vel animali adulto, lympha in duplici ſtatu in quo inueniri ſolet, nimirum vaſis lymphaticis incluſa ac motu perpetuo circumacta, aut vaſis arterioſis venoſisque contenta et maſſae ſanguineae confuſa. In vtroque ſtatu, lympha natiuum colorem, nunquam niſi caſu fortuito permutat, quin e contra, magis clara et pellucida euadit. Hunc colorem non ſolum retinet in vaſis propriis, in quibus impermixta et pura eſt; ſed etiam in vaſis ſanguineis vbique, nec obſtante diuturna fame. Quare erroneum eſt credere, chylum et lympham, per certam metamorphoſin quam *ſanguificationem* vocant, in purpureum humorem commutari ſubſtantialiter, ſeu in purum ſanguinem conuerti. Sub titulo ſanguinis, non intelligo vniuerſam maſſam ſanguineam, ſed ſuccum quendam ſpecificum, certo et determinato organo praeparatum, more aliorum ſuccorum, ex. gr. bilis, ſeminis, lactis etc. a quibus colore intenſe coccineo, indelebili, ſibi ſoli proprio diſcrepat, quales fere ſucci ſanguinei, in nonnullis animantibus intra peculiares folliculos ab Anatomicis dudum inuenti ſunt, ex quibus pretioſa pigmenta ac tincturae poſtmodum praeparantur. Huius itaque ſucci originaliter coccinei, cuius depoſitariae et diſpenſatrices ſunt praefatae glandulae cordis, miſcella, lym-

Lympha in ſanguinem transmutari non poteſt.

Sanguificatio in vulgari ſenſu nulla datur.

Quid proprie ſanguis ſit, exponitur.

lympha quidem vel chŷlus, in ſanguinem nunquam neque in primordiis, neque in progreſſu vitae mutatur ; Aſt, quemadmodum alii ſucci ex. gr. Bilis, Semen, Lac. etc. ſic ſuccus iſte rubicundus lymphae aut chylo ſolummodo aſſociatur, etſi inſpicienti, tota maſſa purus putus ſanguis appareat, quem effectum tribuere oportet, excellentiae ac virtuti praefati ſucci, a cuius colore, reliquorum ſuccorum colores abſorbentur etc.

Diſſertatio
DE ACTIONE FLVIDORVM
IN CORPORA SOLIDA ET MOTV SOLIDORVM IN FLVIDIS

Auct.
Daniele Bernoulli I. F.

Pars Prima
De Preſſione Aquarum fluentium.

I.

M. M. Iun. et Octobr. 1727.

FLuida, quae occurrunt ſolidis quieſcentibus, eadem remouere conantur : Iſtum conatum voco preſſiouem ſeu actionem. Cum ſolida mouentur in fluidis ſtagnautibus, reſiſtentiam patiuntur, quam caeteris paribus eandem eſſe debere cum praedicta preſſione, nemo non videt. Quantimomenti ſit preſſionem illam ſeu reſiſtentiam exacte definire,

re, ex ſequentibus patebit; haec autem determinatio pendet omnino a modo, quo fluida agunt in ſolida; ſed poteſt diuerſimode haec actio concipi, non ſine vario ſucceſſu. Vnde nihil ſtatuendum mihi propoſui, quod non experientia eſſet confirmatum.

II. Si concipiatur fluidum conſtare ex particulis elaſticis, quae ſtatim poſt impulſum ad latus deſiliant locumque faciant particulis ſubſequentibus, tunc preſſionem fluidorum ſequentem in modum determinare licebit.

Impingat fluidum ABDC (fig. I.) perpendiculariter in planum BD ponderis expers, cui annexum eſt ope trochleae R pondus MN quod fluidi impetum ſuſtinere poſſit. Sumatur in fluido longitudo quaeuis BA $=a$, cuius pondus ponatur $=p$, tempus autem, quo fluidum longitudinem aſſumtam deſcribit $=t$ minutis ſec. expreſſum, ſpatium quod graue libere cadendo a quiete deſcribit tempore vnius minuti ſec. $=s$. Nunc vt determinetur pondus MN, conſiderabo planum BD tanquam alternis vicibus cedens in ſitum *bd* iterumque in locum priſtinum rediens, huncque itum et reditum toties fieri, quoties particulae fluidi impingunt in planum. Fingam porro fluidum diuiſum eſſe in multa ſtrata *pp*, *oo* etc. tenuiſſima et ſolida, quorum latitudo ſit $=l$. His ita poſitis patet fluidum abſoluere latitudinem vnius ſtrati *pp*, interea dum pondus MN ſemel aſcendit motu vniformiter retardato per altitudinem M*m*, iterumque per eandem altitudinem motu ſimili et reciproco deſcendit. Poteſt autem corpus MN eodem tempore quo aſcendit et de-

ſcendit per Mm abſoluere ſpatium 4Mm, ſi vniformiter progrediatur velocitate ſua initiali ſeu finali, quam nimirum habet in ſitu MN. Eſt itaque velocitas fluidi ad velocitatem initialem ponderis vt l ad 4Mm. Manifeſtum quoque eſt, quod modo notaui, velocitatem finalem corporis MN poſt deſcenſum eandem eſſe cum velocitate initiali pro aſcenſu; vnde cum velocitas ſit eadem ante et poſt ictum, ſequitur pondus ſtrati pp ſeu $\frac{lp}{a}$ eſſe ad pondus MN reciproce vt eorundem velocitates, ſeu directe vt 4Mm ad l. Vnde pondus MN $= \frac{llp}{4a \times Mm}$; ſupereſt itaque pro abſoluta ponderis determinatione, vt exprimatur valor ipſius Mm. Is vero ita obtinebitur: tempus quo fluidum abſoluit ſpatium l eſt $= \frac{lt}{a}$; ergo tempus, quod pondus inſumit cadendo per Mm eſt $= \frac{lt}{2a}$. Sed ſpatium tali tempore a corpore vniformiter accelerato deſcriptum eſt $= \frac{lltts}{4aa}$, ergo M$m = \frac{llts}{4aa}$, quem valorem ſubſtituendo in aequatione pro pondere MN, habebitur tandem pondus quaeſitum MN $= \frac{ap}{tts}$.

III. Cum a ſit quantitas arbitraria, poteſt illa accipi $= s$, id eſt, $= 16\frac{1}{9}$ ped. Lond. et ſic erit pondus MN $= \frac{p}{tt}$, eſt itaque pondus fluidi longitudinis $16\frac{1}{9}$ ped. Lond. ad pondus MN, quod ſuſtinere valet, vt quadratum numeri exprimentis minuta ſecunda, quibus fluidum abſoluit praedictam longitudinem $16\frac{1}{9}$ ped. ad vnitatem. Et haec propoſitio conuenit cum propoſitione quam habet Cel. Newtonus in Princ. Math. Phil. Nat. p. 325.

p. 325. edit. 3. his verbis; *et propterea globus reſiſtentiam patitur, quae ſit ad vim, qua totus eius motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri ſuae vniformiter progrediendo deſcribit, vt denſitas medii ad denſitatem globi.* Iſta conuenientia manifeſta erit iis, qui ſignificationem verborum Newtoni aſſecuti fuerint. Caeterum; ſi baſis ponderis MN eadem fuerit cum ſectione perpendiculari fluidi, atque inſuper cum fluido eandem habeat grauitatem ſpecificam, erit ipſius longitudo $=\frac{a}{tt}$, ponendo ſemper $a=s$.

IV. Vt experimento cognoſcerem num haec vera ſit determinatio preſſionum fluidorum, conſideraui fluida ex cylindro perforato erumpentia. Demonſtratum autem eſt, quod ſi cylindri ſint ſatis ampli vel ſi ſemper pleni conſeruentur, velocitatem fluidi erumpentis fere tantam fore, quantam graue libere cadendo per altitudinem fluidi ſupra foramen acquirit. Sit iſta altitudo $=L$, et erit $t=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{L}}$, vnde $\frac{a}{tt}=4L$. Oporteret itaque pro hypotheſi hactenus aſſumta, vt pondus quod vena fluidi per foramen erumpentis ſuſtinere poteſt, eſſet aequale quadruplo ponderi cylindri fluidi foramini ſuperincumbentis. Impleui proin aqua cylindrum AD (fig. 2.) cuius pondus prius exploraueram vna cum ratione quam habebat amplitudo AB ad foramen circulare *o*, impletumque rurſus ponderaui, adeo vt iam ſcirem pondus totius cylindri aquei ABDC, ex quo facile erat colligere pondus cylindri *or* foramini ſuperincumbentis. Dein regulam MG ad aequilibrium poſitam ſuper fulcro

in F, oneraui pondere E, quod cum in aequilibrio eſſet cum impetu venae aqueae ad diſtantiam aequalem ab hypomochlio F incidentis in regulam (id quod cognoſci poteſt, quando regula tantum non eleuatur) comparaui illud cum pondere cylindri *or*, et vidi iſta pondera eſſe exacte inter ſe aequalia cum tamen prius quadruplum eſſe debuiſſet alterius, adeo vt hypotheſis aſſumta locum habere non poſſit. Experimentum ab aliis iam fuit inſtitutum.

V. Si ſtrata *pp*, *oo* etc. (fig. 1.) habeant naturam corporum mollium, tunc inſiſtendo iisdem veſtigiis reperietur pondus MN duplo minus. Haec vero hypotheſis praeterquam quod cum experientia nondum conueniat, vel ex eo quoque refutatur quod vltimae particulae fluidorum tanquam maxime durae, neceſſario ſumma elaſticitate ſint praeditae. Si denique concipiatur ſtratum *pp* poſt impulſum ſuum in planum BD iterum recta reſilire (neque enim ſtatim ad latus deſilire poteſt) atque ita impingere in ſtratum proximum *oo* et tunc demum particulas vtriusque ſtrati ad latera diſpergi, fiet ut ſtrata alterna inutilia perdantur, et preſſio fluidi iterum duplo minor erit, quam quae determinata fuit §. 2. eſſetque haec hypotheſis ſatis verae ſimilis, ſi modo experientiae magis conueniret.

VI. Exiſtimo itaque non poſſe preſſiones ſeu reſiſtentias fluidorum continuorum fingi ut ortas ab impetibus minimis et ſaepe repetitis particularum vltimarum fluida componentium; Neque aliter actionem ſuam exerunt fluida pro mea opinione, quam grauitando in obſtacula. Id autem, ni fallor, ex ſequenti explicatione vnicuique mani-

manifeſtum fiet Sit cylindrus ABDC (fig 3.) aqua repletus, et in fundo habeat foramen *on*; cui reſpondet obſtaculum *am*, quod venam aqueam excipit. Sed iam particulae aqueae non percutient obſtaculum, quin potius praeterfluent, ſicut *oha* et *nhm*. Poſſumus itaque concipere, circellum *am* pertinere ad cylindrum ipſique eſſe firmiter annexum, rimam vero ſeu hiatum inter fundum CD et circellum *am* iam eſſe foramen per quod aqua effluit; et ita cuilibet obuium eſt, non poſſe *am* aliter premi, quam a ſuperincumbente cylindro aqueo *orsn* (negligendo particulam *onma*) pariter ac omnes cylindri partes premuntur a cylindro aqueo ſibi incumbente.

Caeterum poſſunt omnia fluida, quae ſunt in motu, conſiderari tanquam ſi continuo ex cylindro conſtanter pleno per foramen in ima parte cylindri conſtitutum effluerent; altitudo autem iſtius cylindri fictitii ea ſit, vt graue per illam libere cadendo acquirat velocitatem fluidi.

VII. Ex praecedente paragrapho ſequitur preſſionem fluidorum eſſe quadruplo minorem, quam determinata fuit in paragrapho ſecundo, vnde retentis ſymbolis ibidem aſſumtis erit verum pondus $MN = \frac{ap}{4tts}$, ſiue facto iterum $a = s$, $MN = \frac{p}{4tt}$, vbi per t intelligitur numerus minutorum ſec., quibus fluidum abſoluit motu vniformi ſpatium s ſeu $16\frac{1}{9}$ ped. Londinenſium. Si velocitas fluidi alio modo determinetur, alia obtinebitur formula. Ponatur v. gr. velocitas talis vt tempore vnius min. ſec. fluidum ab-

ſoluat na, erit pond. $MN = \frac{1}{4}nnp$, vel ſi a non ſit $= s$, erit $MN = \frac{nnap}{4s}$; ſed calculus fit maxime commodus, ſi a exprimitur per s, adeo vt ponatur vel $a = s$ vel $a = 4s$ vel $a = ls$, oportet autem menſuram ſemel aſſumtam retinere, et omnes magnitudines ad illam reducere. Interim patet ex praedictis formulis eſſe preſſiones fluidorum in ratione ſuperficierum quas premunt, denſitatum fluidorum et celeritatum quadratorum.

VIII. Et haec hactenus de fluidis perpendiculariter in plana incidentibus: pauca iam addam circa caſus reliquos, cum nimirum fluida vel oblique incidunt in plana vel ſub quacunque directione in ſuperficies quascunque. Hic ante omnia monendum puto, quousque extendendum ſit id quod dixi §. 6. ſcilicet poſſe conſiderari obſtaculum *am* tanquam pertinens ad ipſum cylindrum ABDC. Scilicet fluidum premit vbique perpendiculariter latera cylindri, excepta illa fluidi parte, quae iam egreſſa ex cylindro niſum facit tantum ſecundum directionem curſus ſui, qui ſi non ſit perpendicularis ad obſtaculum erit preſſio fluidi reſoluenda in duas alias, quarum altera ſit perpendicularis ad obſtaculum, altera eidem parallela, ſolaque prior adhibenda. Vnde ſequitur eſſe caeteris paribus preſſiones in ratione anguli incidentiae ſinus. Ponamus nunc eſſe filum ADB (fig. 4.) cuiuscunque curuaturae, ſed cuius rami AD et DB ſint ſimiles et aequales illudque excipere fluidum ſub directione DC et quaeritur ratio preſſionis fluidi ad illam preſſionem quam exerceret perpendiculariter fluendo in AB.

AB. Sit elementum curuae $or = ds$, elementum abſciſſae $gh = op = dx$, $AC = b$, preſſio fluidi in $AC = p$, ergo preſſio in gh vel $op = \frac{pdx}{b}$, et preſſio in $or = \frac{pdx^2}{bds}$, quae reſoluenda eſt in duas alias ſecundum directiones og et op; poſterior deſtruitur a ſimili preſſione a parte oppoſita agente; vnde prior ſola conſideranda eſt, quae fit $= \frac{pdx^3}{bds^2}$, cuius integrale $\int \frac{pdx^3}{bds^2}$ dabit integram preſſionem in arcum Ao, ponendoque dein $x = b$, orietur tota preſſio in AD, quae comparata cum p dabit rationem quaeſitam.

IX. Eadem ratio ſubſiſtet ſi integra ſuperficies generata concipiatur ex motu curuae ADB circa axem DC. Sed ſi haec eadem curua ADB rotando circa axem DC ſuperficiem generet in quam fluidum impingit, erit preſſio in annulum $or = \frac{npxdx^3}{bds^2}$ et preſſio in annulum $gh = \frac{npxdx}{b}$ (n denotante ſemicircumferentiam circuli, cuius radius = vnitati); eſt itaque preſſio in totam ſuperficiem Ao ad preſſionem in ſuperficiem planam Ag vt $\int \frac{npxdx^3}{bds^2}$ ad $\frac{npxx}{2b}$. Sequitur exinde eſſe preſſionem in ſuperficiem ſphaericam dimidiam totius preſſionis perpendicularis in circulum maximum. Haec vtut notiſſima, indicare tamen volui, quia explanare et intellectu faciliora reddere poſſunt ea, quae in ſequentibus dicentur.

Pars

Pars Secunda

De vltimis velocitatibus corporum in mediis reſiſtentibus.

I.

Vidimus ex praecedentibus quomodo aeſtimanda ſit ex grauitate et velocitate fluidorum, eorundem preſſio: In ſequentibus dabo menſuras effectuum, quos huiusmodi preſſiones producere valent in diuerſis corporibus variis legibus motis. Haec autem ſecunda pars conſiderabit potiſſimum corpora in ſtatum permanentem et inuariabilem poſita: tametſi enim corpora vi aequabili ſollicitata in mediis reſiſtentibus nunquam perueniant ex quiete ad ſtatum permanentem, attamen plerumque citiſſime ad illum conuergunt, ita vt deinceps nulla ſenſibilis differentia in motu corporum obſeruari poſſit. Caeterum iam monui reſiſtentiam, quam corpora in motu ſuo a fluidis ſtagnantibus patiuntur, non differre a preſſione fluidorum eadem velocitate contra corpus quieſcens motorum.

II. Si in fluido infinito corpora grauitate ſua deorſum mouentur, conuergunt ad illum ſtatum, quo reſiſtentia aequalis eſt eiusdem ponderi in fluido. Pondus equidem conſtans eſt, quaecunque ſit figura corporis, modo habeat eandem molem. Sed reſiſtentia in corporibus diuerſae figurae varia eſt. Nos vero conſiderabimus tantum

tum globos. Methodi applicatio ad alias figuras facilis erit ex §§.8.et 9.part.1. In his itaque ſi quaeratur velocitas vltima, ſequentem in modum erit procedendum. Retineantur ſymbola §. 7. part. I. et ponatur velocitas quaeſita talis, vt abſoluat intra min. ſec. ſpatium na. Erit reſiſtentia globi $\frac{nnap}{8s}$ (nam reſiſtentia globi dimidia eſt quam reſiſtentia circuli maximi per §. 9. p. 1. et reſiſtentia circuli maximi eſt $\frac{nnap}{4s}$ per §. 7. p. 1.); ſit praeterea diameter globi $=m$, et ratio grauitatum ſpecificarum inter ſolidum et fluidum vt b ad c, atque pondus abſolutum globi $=1$, erit pondus globi ſimilis fluidi $=\frac{c}{b}$ et pondus cylindri fluidi globo circumſcripti $=\frac{3c}{2b}$; vnde $p=\frac{3ac}{2mb}$, et conſequenter reſiſtentia globi $=\frac{3nnaac}{16msb}$, quae debet eſſe $=$ ponderi globi in fluido, quod eſt $=\frac{b-c}{b}$; ergo $\frac{3nnaac}{16ms}=b-c$, vel $na=4\sqrt{\frac{ms\times\overline{b-c}}{3c}}$, et poſterior haec formula denotat ſpatium, quod globus vltima ſua velocitate intra min. ſec. perficere poteſt.

III. Si m ſit $=\frac{3}{16}s$, id eſt, ſi diameter globi ſit 3. ped. cum quarta parte vnius pollicis, erit praedictum ſpatium $=s\sqrt{\frac{b-c}{c}}$, et ſi globus ſit duplo grauior mole aequali fluidi, erit $na=s$, id eſt, globus perficiet velocitate ſua vltima $16\frac{1}{9}$ pedes Anglicos, hancque celeritatem corpus libere cadens acquirere poteſt lapſu ex altitudine $\frac{1}{4}s$. Et generaliter vltima celeritas corporis acquiri poteſt lapſu ſuo libero ex altitudine $\frac{4m\times(b-c)}{3c}$; vnde ſi

$b = 2c$, globus delapſus in fluido ex altitudine infinita non maiorem acquireret velocitatem, quam in vacuo haberet poſt lapſum ex altitudine quatuor tertiarum partium quae diametri.

IV. Eadem methodo etiam ſolui poſſunt quaeqiones de vltima velocitate nauis in mari. Tot autem reuiruntur data, vt haec fere omni vſu careant in praxi, niſi adhibeantur quaedam artificia, quibus breuius deſiderata determinantur. Si nauis a vento propellitur, oportet noſſe velocitatem venti, numerum et magnitudines velorum vna cum eorundem poſitione; ab his pendet vis nauem propellentis determinatio; poſſunt autem, ni fallor, ſatis accurate haec haberi. Id vnicum obtentu difficillimum eſt, vt habeatur figura exacta illius partis in naue, quae aquae ſubmerſa eſt; ab hac vero pendet reſiſtentia aquae, quae vi nauem propellenti debet eſſe aequalis. Ponamus tamen haec omnia data in exemplo quodam particulari, vt ſaltem pateat modus, quo in his caſibus procedendum. Sint v. gr. vela omnia perpendiculariter ad ſpinam et directionem nauis poſita, habeantque in vniuerſum mille pedes quadratos in ſuperficie, ſit velocitas venti talis vt poſſit quinquaginta pedes intra min. ſec. abſoluere. Habeat pars nauis ſubmerſa talem figuram, vt reſiſtentia eadem ſit, quam haberet planum quadraginta pedum quadratorum, cuius directio eſt perpendicularis ad planum. Sit denique grauitas ſpecifica aquae ad grauitatem ſpecificam aeris vt 800 ad 1, atque numerus pedum (quos nauis velocitate ſua maxima percurrit tempore vnius min. ſec.) $= x$. Oportet

tet autem, vt vis venti eadem ſit, quae reſiſtentia aquae: Suntque preſſiones fluidorum in ratione quadrata velocitatum, et ſimplici ſuperficierum nec non denſitatum. Ergo preſſio venti erit exprimenda per $(50-x)^2 \times 1000 \times 1$ et reſiſtentia ſeu preſſio aquae per $xx \times 40 \times 800$. ergo $2500000 - 100000x + 1000xx = 32000xx$; vel $50-x = x\sqrt{32}$, vnde $x = 7\frac{1}{2}$. ped. proxime. Igitur talis nauis poterit ſingulis minutis ſecundis conficere circiter $7\frac{1}{2}$. pedes.

V. Ad normam praecedentis exempli omnes caſus poſſibiles calculo ſubiici poſſunt; cum autem poſitio velorum eſt ad nauem obliqua, res eſt altioris indaginis; poterit tamen quodam modo ſolui, ſi praedicta conferantur cum Patris mei *manuaria naut.* Caeterum velocitas venti cognoſcitur ex vi venti, haec autem ex anemometro haberi poteſt, et determinatio illius ſuperficiei planae, quae eandem habet cum parte nauis immerſa reſiſtentiam ex eo poteſt deduci, ſi experimento innoteſcat, quantum in aqua ſtagnante nauis dato tempore et data vi tracta promoueatur. Iſta deductio patebit ex ſequenti paragrapho.

VI. Pes cubicus Londinenſis continet circiter 76 libras romanas aquae dulcis. Poſito iam planum contineretot pedes quadratos, quod continentur vnitates in f, illudque moueri directione perpendiculari in huiusmodi aqua dulci et quidem tali velocitate, vt ſingulis min. ſec. conficiat certum numerum pedum deſignatum per n. Erit preſſio aquae contra planum $= \frac{nnap}{4s}$ (per §. 7. p. 1.)

et ſi per a intelligere velimus menſuram vnius pedis, erit $p=$ tot libris quot continentur vnitates in $76f$, vnde preſſio aquae contra planum iam eſt $=\frac{76\,nnf}{4s}$ ſeu $\frac{19\,nnf}{s}$, quae eſt aequalis ipſi preſſioni mediante qua planum in motu ſuo conſeruatur, quaeque proin ſi aequetur cum vi nauem propellente, habebitur numerus deſideratus f. Ponamus v. gr. eſſe nauem ita formatam et oneratam, vt illam decem homines (quorum actionem aequipollere ponemus 1000 libris) tempore duorum minutorum primorum in aqua ſtagnante trahere poſſint per ſpatium mille pedum; erit in hoc caſu $n=\frac{50}{6}$, et habetur $\frac{19\,nnf}{s}=1000$, vnde habebitur ponendo pro s valorem $16\frac{1}{9}$; $f=12\frac{4}{19}$. Ergo haec nauis eandem habebit reſiſtentiam ac haberet planum $12\frac{4}{19}$ ped. quadratorum perpendiculariter contra aquam motum. Liceat hic in tranſitu monere, inepte machinas adhiberi ad protrahendam nauem in aqua ſtagnante neque vtilius vim impendi poſſe quam manibus trahendo funem vel naui alligatum, ſi homines conſiſtant in ripa, vel alicubi fixum, ſi in naui trahant. Quoties autem machinae adhibentur perditur inutiliter vis in frictiones impenſa: Si tamen aquae notabilem tenacitatem ineſſe ponere vellemus, non reiiciendus eſſet illarum vſus.

VII. Videmus quoque corpora fluminibus innatantia non omnino eandem habere velocitatem, quam habet aqua. Id ex nulla alia cauſa deducendum quam ex reſiſtentia aeris. Hinc ſi quaeratur velocitas quam corpus innatans flumini habeat reſpectu fluminis, illa obtine-

tinebitur ſi detur in corpore tam figura partis aquae ſubmerſae quam figura partis extra aquam poſitae. Si reſiſtentia prioris ſit ad reſiſtentiam poſterioris vt 1 ad m, et ſi velocitas aquae dicatur n, velocitas corporis x, corpus mouetur contra aquam velocitate $n-x$ et contra aerem velocitate x; et cum reſiſtentiae vtriusque fluidi in corpus debeant eſſe aequales, habebitur $800 \times (n-x)^2 = mxx$, vel $n-x = \frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{800}}$, et $\frac{n\sqrt{800}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}} = x$, et retardatio ab aeris reſiſtentia, quae exprimitur per $n-x$, erit $= \frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}}$, ex qua preſſione patet, non poſſe hanc retardationem omnino negligi, cum m eſt numerus admodum magnus, veluti in nauibus, vbi non facile minor erit m quam 50 ſeu 49. Vnde in his reſiſtentia aeris haud minorem quam quintam partem velocitati (quam alias habitura eſſet nauis) demet. Quod ſi vero corpus totum fluido eſt ſubmerſum, non poteſt non eandem cum fluido velocitatem habere.

VIII. Non abs re fore puto hic quaedam obiter monere circa vortices coeleſtes. Statuitur vulgo planetas a materia ſubtili circa ſolem acta abripi. Si ita ſit, oportet vt planetae habeant eandem celeritatem cum materia ſubtili. Alii inſuper fingunt, materiam iſtam inaequali velocitate ferri, exinde deducturi motum planetarum circa axes ſuos. Videamus autem quanta iſta inaequalitas velocitatum eſſe deberet. Sit diſtantia terrae a ſole $= 12000$ diametrorum terrae; et ſic centrum terrae mouebitur $\frac{24000}{365}$ vicibus celerius motu annuo quam punctum aequatoris motu diurno; vnde maxima

differentia velocitatum materiae ſubtilis in regione terrae eſſe deberet $=\frac{365}{12000}$ velocitatis mediae, cum differentia diſtantiarum exaequat tantum partem duodecies milleſimam diſtantiae mediae; quae rationum inaequalitas vix concipi poteſt. Si fingatur planetas moueri in fluido quieſcente, oporteat vt fluidum illud ſit minimum 3000000 vicibus rarius quam materia planetae, quia alias non poſſet non ſenſibiliter planetae motum perturbare. Quis autem tantam ſubtilitatem concipiat? Motum planetarum in vacuo, multo minus probo.

IX. Notari quoque meretur, quam inſufficiens ſit hypotheſis Carteſiana pro explicando deſcenſu corporum a grauitate. Praeterquam enim quod corpora non verſus centrum ſed verſus axem tendere deberent, non poſſent non abripi a materia ſubtili unaque cum illa in vorticem agi. Commode admodum fingeretur motum iſtum horizontalem eſſe infinities minorem motu verticali, ſi modo id ſtare poſſet cum ſolutione ſequentis problematis. *Probl.* Si in vortice BCD (fig. 5.) cuius centrum A, quieſcat globus E grauitatis expers, quaeritur ratio impulſus fluidi in ſuperficiem globi ſecundum directionem tangentialem ad preſſionem, quam fluidum ob vim ſuam centrifugam exercet. *Sol.* Sit diſtantia globi a centro vorticis $=r$, numerus pedum quos fluidum vorticis in illa diſtantia abſoluit tempore vnius minuti ſec. $=n$; denique pondus globi fluidi $=p$. Monſtrauit autem Hugenius, quod ſi globus feratur ea velocitate, quam acquirit lapſu ſuo libero per altitudinem $\frac{1}{2}r$, eius vis centrifuga aequalis ſit ſuo ponderi. Ergo cum idem

dem corpus mouetur ea velocitate quam acquirere cadendo ex altitudine $\frac{nn}{4s}$, tunc vis centrifuga erit ad podus vt $\frac{nn}{4s}$ ad $\frac{1}{2}r$ (per s autem ſemper intelligo numerum pedum, quos graue cadendo deſcribit intra minutum ſecundum). Sed habet fluidum hanc velocitatem modo definitam, eſt itaque vis centrifuga globi fluidi, ſeu preſſio fluidi in globum ſolidum, $=\frac{nnp}{2rs}$. Vt iam determinare poſſimus preſſionem tangentialem fluidi in globum, ponemus diametrum ipſius $=a$, et cum ſit pondus cylindri globo circumſcripti $=\frac{2}{3}p$, atque preſſio fluidi in ſuperficiem ſphaericam dimidia ſit preſſionis perpendicularis in circulum maximum, erit (per §. 7. p. 1) preſſio tangentalis fluidi $=\frac{3nnap}{16s}$. Eſt itaque ratio quaeſita vt $\frac{3nnap}{16as}$ ad $\frac{nnp}{2rs}$, vel vt $8a$ ad $3r$. Sed a ſeu diameter vltimarum particularum grauitantium eſt incomparabiliter minor quam r ſeu diſtantia corporum grauium a centro terrae: ergo tantum abeſt, vt motus horizontalis euaneſcere poſſit prae verticali, quin contrarium potius obtinere debeat. Caeterum ſi corpus in vortice conſtitutum et quieſcens haberet figuram cubicam, eſſet praedicta ratio vt r ad $2a$ ſiue vt duplum latus cubi ad diſtantiam corporis a centro vorticis.

Pars

Pars Tertia.

De motu corporum grauitate vel leuitate ſua deorſum vel ſurſum motorum.

I.

QVamuis hoc argumentum ita iam ſit pertractatum a plurimis Geometris, vt vix aliquid noui ſuperaddi poſſe videatur, minime tamen haeſitaui mea quoque meditata circa hanc rem cum Societate communicare, ideo quod non ſolum varias motuum relationes, ſed ipſas eorundem quantitates atque menſuras, ad Newtoni exemplum definio. Et cum calculus experimentorum formulis ſeu aequationibus innitatur prolixiſſimis, conatus ſum illas multo compendioſiores reddere; Occurrent quoque theoremata plane noua, quibus occaſionem dederunt experimenta ab Excellentiſſimo Domino Gynthero cum tormentis bellicis inſtituta, quae videre eſt in parte 4. vbi ea ad calculum reuoco. Non itaque deerit campus in tritiſſima re, noua nec antea obſeruata adiiciendi.

II. Conſtat, incrementa velocitatum in motu corporum ſemper proportionalia eſſe vi animanti ductae in elementum temporis. Si itaque velocitas corporis cadentis in fluido reſiſtenti dicatur v (exprimam autem deinceps v per numerum pedum, quos motu aequabili conficere poſſet corpus tempore vnius minuti ſecundi) et tempus lapſus deſignetur per t, ſpatium a corpore praedicto

dicto tempore deſcriptum $=s$, et vis corpus animans in illo momento ſit $=p$, erit $dv=pdt$: et habebitur p ſubtrahendo de actione grauitatis reſiſtentiam fluidi; ſit grauitas corporis in fluido, ſeu differentia grauitatum ſpecificarum corporis et fluidi, quae conſtanter eadem eſt, $=a$, et reſiſtentia fluidi, quae proportionalis ſemper eſt quadratis velocitatum, $=nvv$ (poteſt autem n determinari ex grauitate ſpecifica fluidi et figura corporis cadentis per §. 7. part. 1. et ſeqq.) et degenerabit aequatio $dv=pdt$ in hanc aliam $dv=(a-nvv)dt$, vel $dt=\frac{dv}{a-nvv}$; et $ds=vdt=\frac{vdv}{a-nvv}$. Oporteat nunc aequationem eruere inter s et t purgatam a quantitate v, vt nimirum ex altitudine lapſus, tempus determinari poſſit vel reciproce. Atque hoc praeſtabimus in ſequenti paragrapho.

III. Ponatur breuitatis ergo $\frac{a}{n}=mm$, et cum ſit $dt=\frac{dv}{a-nvv}$ erit iam $ndt=\frac{dv}{mm-vv}$, ergo $nt=\int\frac{dv}{mm-vv}=\frac{1}{m}\log.(m+v)-\frac{1}{2m}\log.(mm-vv)\pm$ Conſt. C. Sed ſi corpora a puncto quietis delabuntur, euaneſcunt ſimul t et v, ergo $C=o$, vnde aequatio ita ſe habebit $2mnt=2\log.(m+v)-\log.(mm-vv)$ vel (poſito $c=$ illi numero cuius logarithmus eſt vnitas) $c^{2mnt}=\frac{m+v}{m-v}$; vnde $v=(c^{2mnt}m-m):(c^{2mnt}+1)$. Conſideremus iam alteram aequationem $ds=\frac{vdv}{a-nvv}$, vel $nds=\frac{vdv}{mm-vv}$; ſumendo autem integralia habetur $ns=-\frac{1}{2}\log.(mm-vv)\pm$ conſt. C: et cum s et v ſimul euaneſcere debeant, erit $C=\pm\log.m$; eſt ergo $2ns=\log.mm-\log(mm-vv)$; et $c^{2ns}=\frac{mm}{mm-vv}$, vel denique $v=m\sqrt{(c^{2ns}-1)}:c^{ns}$. Ex combinatione vtrius-

que valoris ipſius v orietur haec aequatio $(c^{2mnt}m-m):(c^{2mnt}+1)=m\sqrt{(c^{2ns}-1)}:c^{ns}$: quae recte pertractata dat $2c^{mnt+ns}=c^{2mnt}+1$; vel $2c^{ns}=c^{mnt}+c^{-mnt}$; vel $c^{mnt}=c^{ns}+\sqrt{c^{2ns}-1}$), aut denique $t=(\log.\overline{c^{ns}+\sqrt{(c^{2ns}-1)}}):mn$, et ſi pro m ſubſtituatur ipſius valor $\sqrt{\tfrac{a}{n}}$, erit $t=(\log\overline{c^{ns}+\sqrt{(c^{2ns}-1)}}):\sqrt{an}$. Poterit itaque ope vltimae huius formulae cognoſci t ex s. Si vero reciproce ſpatia quaerenda ſint ex datis temporibus inſeruiet haec aequatio $s=(\log.(c^{mnt}+c^{-mnt})-\log.\ 2):n=(\log(c^{t\sqrt{an}}+c^{-t\sqrt{an}})-\log.2):n$.

IV. Aequationes, quas dedi in praecedente paragrapho, ſi calculo numerico ſubiici debeant, vti fecit Newtonus, calculus fit plerumque admodum prolixus. Notandum autem eſt in omnibus fere experimentis hactenus inſtitutis, eſſe n et s tales numeros vt vnitas poſſit negligi prae c^{2ns}, idque omnino abſque vllo ſenſibili errore; tunc autem fit ſimpliciter $t=(ns+\log.\ 2):\sqrt{an}$ et $s=(t\sqrt{an}-\log.\ 2):n$. Sunt vtique hae aequationes ſimpliciſſimae, poſſuntque facile ad omnes caſus particulares applicari, alias laborioſiſſimo calculo vix ſuperabiles, quod apparet ex methodo accuratiori qua Newtonus experimenta a ſe inſtituta ad calculum reuocat in *lib. 2. princ. phil. edit. 3.* Non poteſt vero ſemper tuto negligi illa vnitas reſpectu c^{2ns}; praeſertim cum experimenta inſtituta fuerint in medio valde leui, veluti in aere et ſi altitudo, qua corpus deſcendit, ſit valde mediocris, ac denique cum corpus ſit ſat magnum. In his tamen caſibus (in quibus nempe ns eſt numerus binarium ſeu ternarium haud ſuperans) calculus

culus absque praedicto compendio non admodum laborioſus fit.

V. In omnibus praecedentibus aequationibus intelligitur per n talis quantitas, quae multiplicata per quadratum velocitatis dat reſiſtentiam abſolutam; pendet itaque determinatio ipſius n a magnitudine et figura corporis, tum etiam a grauitate ſpecifica fluidi; his autem pro lubitu aſſumtis deſiderata quantitas n petenda eſt ex iis, quae monui §§. 7. 8. et 9. part. 1. Hac vice conſiderabo ſaltem corpora ſphaerica, quandoquidem cum huiuscemodi corporibus maxima experimentorum pars cum a Newtono tum etiam ab aliis inſtituta fuit.

VI. Vidimus in §. 7. p. 1. quod poſita velocitate tali, vt corpus abſoluat motu vniformi intra minutum ſecundum ſpatium expreſſum per na, reſiſtentia ſit $=\frac{nnap}{4s}$ (vbi per p intelligitur pondus cylindri fluidi datae cuiuscunque longitudinis a, atque cuius baſis eſt ſuperficies cui fluidum impingit et s deſignat ſpatium, quod corpus libere cadendo in vacuo a quiete perficit intra min. ſec.). Aſſumamus a deſignare menſuram vnius ped. Angl. et erit reſiſtentia $\frac{nnp}{4s}$, et quia n exprimit velocitatem, eſt numerus multiplicatus cum quadrato velocitatis $\frac{p}{4s}$; quod ſi autem reſiſtentia in globum ſumatur, erit idem numerus duplo minor, ſeu $\frac{p}{8s}$, (vel ponendo pro s $16\frac{1}{9}$ ped. Angl.) $\frac{9}{1160}p$. Si loco ipſius p denotantis pondus cylindri fluidi longitudinis vnius pedis, cuius baſis eſt aequalis circulo maximo globi, velimus introducere pondus fluidi,

cuius moles eſt aequalis globo cadenti, ponemus menſuram vnius pedis ſe habere ad diametrum globi vt 1 ad m, et ſic erit pondus cylindri fluidi $= \frac{2}{3} mp$; vnde ſi tale pondus dicatur b erit $p = \frac{3b}{2m}$ et $\frac{9}{1160} p = \frac{27b}{2320m}$. Quod itaque vocauimus §§. 2. 3. et 4. part. 3. n, id poſito figuram corporum cadentium eſſe ſphaericam degenerabit in hanc quantitatem modo dictam $\frac{27b}{2320m}$. Ergo reaſſumendo litteras ibi aſſumtas, erit

$$t = [\log (c^{\frac{27bs}{2320m}} + \sqrt{(c^{\frac{27bs}{1160m}} - 1)})] : \sqrt{\frac{27ab}{2320m}}$$

$$\text{et } s = [\log.(c^{t\sqrt{\frac{27ab}{2320m}}} + c^{-t\sqrt{\frac{27ab}{2320m}}}) - \log.2.] : \frac{27b}{2320m},$$

his autem aequationibus, vti notaui §. 4. ſine ſenſibili errore ſequentes ſubſtitui poſſunt multum ſimpliciores, $t = (\frac{27bs}{2320m} + \log.2.) : \sqrt{\frac{27ab}{2320m}}$ et $s = (t\sqrt{\frac{27ab}{2320m}} - \log.2.) : \frac{27b}{2320m}$.

VII. Et ita quidem determinauimus motum corporum in fluidis reſiſtentibus reſpectu corporum libere cadentium. Supereſt praecipuum, ſcilicet, vt motus ille definiatur abſolute ita vt ex dato tempore, v. gr. numero quodam minutorum ſecundorum inferri poſſit ſpatium exprimendum per certum et definitum numerum pedum Anglicorum. Idque obtineri poterit ex comparatione temporum requiſitorum pro lapſu per certam quandam altitudinem tam in medio reſiſtenti quam non reſiſtenti: poſſet adeoque deduci ex vnico experimento; ſed poſſumus quoque eo carere, conſiderando quod primo momento, dum velocitas corporis cadentis adhucdum infinite parua eſt, medium plane non reſiſtat, vnde aequa-

aequalia ſunt prima lapſus tempuſcula, tam in hypotheſi reſiſtentiae quam non reſiſtentiae, ſi nimirum ſpatiola ſunt aequalia; poteſtque exinde inueniri valor ipſius a in numeris abſolutis, vti id in ſequenti §. patebit.

VIII. Denotet AQ (fig. 6.) ſpatium in vtraque hypotheſi emenſum; QO autem repraeſentet tempus pro medio reſiſtenti et QP tempus pro medio non reſiſtenti; et erit (ponendo $AQ = s$) $QP = \sqrt{\frac{a+b}{16\frac{1}{9}a}}\, s$ et $QO =$

$[\log.(c^{\frac{27bs}{2320m}} + \sqrt{(c^{\frac{27bs}{1160m}} - 1)})] : \sqrt{\frac{27ab}{2320m}}$. Oportet autem harum quantitatum (QP et QO) ſumere differentialia, eademque poſito $s = o$, inter ſe aequare: eſt diff. $QP = ds\sqrt{a+b} : 2\sqrt{16\frac{1}{9}as}$ et diff. QO eſt (ponendo vbique breuitatis ergo e pro $\frac{27b}{2320m}$) $= [c^{es}eds\, \sqrt{(c^{2es} - 1)} + c^{2es}eds] : [c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae - ae)} + c^{2es}\sqrt{ae} - \sqrt{ae}]$. In his quantitatibus differentialibus ſi ponitur $s = o$, fit vtraque infinita atque adeo nihil ex earundem comparatione cognoſci poteſt. Vt huic incommodo obuiam eatur, multiplico aequationem per $\sqrt{16\frac{1}{9}as}$, vt habeatur $\frac{1}{2}ds\sqrt{a+b}. =$ $(c^{es}eds\sqrt{(c^{2es} - 1)} + c^{2es}eds) \times \sqrt{16\frac{1}{9}as}$: $(c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae - ae)} + c^{2es}\sqrt{ae} - \sqrt{ae})$; vel diuidendo per ds atq; negligendo primum terminum in numeratore poſterioris quantitatis, erit $\frac{1}{2}\sqrt{a+b} = c^{2es}e\sqrt{16\frac{1}{9}as} : [c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae - ae)} + c^{2es}\sqrt{ae} - \sqrt{ae}]$. In hac aequatione ſi ponitur $s = o$ atque ſimul obſeruentur ea quae iuxta Patrem meum monuit Ill. Hoſpitalius in Analyſi ſua infinite paruorum p. 145. edit. primae, reperietur $a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b = 32\frac{2}{9} - b$.

Denotat vero a pondus corporis in fluido et b pondus ſimilis molis fluidi. Vnde ſi grauitas ſpecifica corporis in vacuo ſit ad grauitatem ſpecificam fluidi vt q ad I, erit $a = 32\frac{2}{9} - \frac{32\frac{2}{9}}{q}$, et $b = \frac{32\frac{2}{9}}{q}$: Atque ſi hi valores ſubſtituantur in aequationibus pro s et t circa finem §. 6. part. 3. datis, habebuntur aequationes finales, quarum ope ex data diametro globi vna cum ipſius grauitate ſpecifica reſpectu grauitatis ſpecificae fluidi, poteſt relatio abſoluta haberi inter tempus minutis ſecundis expreſſum et ſpatium iam abſolutum numero quodam pedum Anglicorum definitum. Hic tantum apponam, quas dixi proxime veras eſſe. Erit ergo $t = \frac{s\sqrt{27}}{\sqrt{2320m \times (q-1)}} + \frac{q \log. 2\sqrt{2320m}}{32\frac{2}{9}\sqrt{27q-27}} =$ (quam proxime) $(108 s\sqrt{\frac{1}{m}} + 199 q\sqrt{m}) : 1000\sqrt{q-1}$: et $s = \frac{1000 t\sqrt{mq-m} - 199mq}{108}$.

IX. Si quis iam velit haſce formulas ſimpliciſſimas experimentis confirmare, is deprehendet conſenſum inter calculum et experimenta, quem vix ipſe ſperaſſem: indicio certiſſimo et rectam a nobis aſſumtam eſſe reſiſtentiae menſuram et nos omni cum ſucceſſu eadem vſos fuiſſe pro eruenda theoria motus corporum in mediis fluidiſſimis, id eſt, omni tenacitate expertibus. Extant autem experimenta quamplurima exactiſſime inſtituta a Cl. Newtono in eiusdem *Princ. Math. Phil. Nat. p.* 346. *et ſeqq. edit.* 3. Apponam hic vnicum experimentum vt pateat formularum noſtrarum applicatio.

Experimentum. Globus cuius pondus in vacuo erat

$156\frac{1}{3}$

$156\frac{1}{3}$ gran. et 77. gr. in aqua cadebat per altitudinem 112. digitorum tempore quatuor minut ſec. et diameter globi erat $\frac{7}{100}$ pedis Angl.

In hoc caſu eſt $q = \frac{469}{238}$; $s = \frac{112}{12} = \frac{28}{3}$ et $m = \frac{7}{100}$. Subſtitutis autem hiſce valoribus in aequatione priori reperitur $t = 3\frac{9}{10}$ cum experientia fuerit $t = 4$.

Caeterum feci ipſe plura experimenta, et mire conuenerunt cum theoria. Aliquando tamen de corpore cylindrico ita ſtudioſe fabricato, vt dum deſcenderet ipſius baſis non poſſet extra ſitum horizontalem ſe ponere, obſeruaui, multo tardius deſcendiſſe, quam pro theoria debuiſſet (deberet autem ipſius reſiſtentia duplo eſſe maior, quam ſuperficiei ſphaericae eiusdem diametri) Vnde tunc iudicaui theoriam non poſſe applicari, niſi ad illa corpora quae findendae aquae aptiora ſint; poteſt enim in his tenacitas fluidi negligi, cum in ſuperficiebus planis fluidorum tenacitas vtcunque exigua ſenſibilem tamen retardationem producere poſſit. Poſtea vero conſideraui, fuiſſe corpus ita temperatum, vt grauitas ipſius ſpecifica vix aliquantulum maior eſſet grauitate ſpecifica aquae in qua deſcendit, vnde fieri potuit vt tenacitas aquae iam non amplius negligenda eſſet reſpectu reſiſtentiae quae ob lentiſſimum corporis deſcenſum minima erat. In eo deinceps plurimis aliis experimentis confirmatus fui.

X. Quod ſi corpora in fluidis ſurſum tendant, id eſt, ſi fluida ſint ſpecifice grauiora quam ſolida corpora, non aliter mutandae erunt aequationes noſtrae, quam quod loco $\sqrt{q-1}$ ponatur $\sqrt{1-q}$, ita vt habeatur $t =$

(108

$(108 s\sqrt{\frac{1}{m}} + 199 q\sqrt{m}) : 1000\sqrt{1-q}$. et $s = \frac{1000 t\sqrt{m - mq} - 199 mq}{108}$. Ratio eſt, quod in hoc caſu loco aequationis $a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b$ in paragrapho octauo huius partis erutae, habetur $-a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b$, quem valorem ſubſtituendo in aequationibus circa finem paragraphi 6. appoſitis, oriuntur modo dictae aequationes pro s et t.

Circa aſcenſum corporum ob grauitatem ſuam negatiuam ſurſum tendentium experimenta nulla extant apud Newtonum; feci itaque quamplurima, quae cum praedictis aequationibus omnino conueniunt, ſi differentia inter grauitates corporis et fluidi ſit grandiuſcula; ſed ſi differentia ſit valde parua, deprehenditur aſcenſus corporum multo tardior, quam pro theoria noſtra eſſe deberet; quod phaenomenon me diu ancipitem tenuit, donec tandem obſeruauerim, id tenacitati fluidorum tribuendum eſſe, hancque nullo modo negligendam eſſe neque in aſcenſu neque in deſcenſu corporum, cum iam differentia grauitatum infra trigeſimam vel quadrageſimam partem grauitatis fluidi eſſe incipit, probe intellexerim, vti in praecedente paragrapho monui. Caeterum hic loquor de aſcenſu corporum fluidis ſpecifice leuiorum; nam corpora grauiora ſurſum proiecta aliam theoriam, quam quae ex hactenus dictis pateat, poſtulant. Atque de his agam in ſequenti capite.

Pars

Pars Quarta

De motu corporum ſurſum proiectorum, vbi ad calculum reuocantur experimenta ab Excellentiſſ. Dno Günthero cum tormentis inſtituta.

I.

Retinebo hic ſignificationes, quas dedi litteris a, n, v, s et t. Sic ſe ſponte offerunt ſequentes aequationes initiales pro aſcenſu corporum $-dv = (a + nvv)\, dt$ vel $dt = \frac{-dv}{a + nvv}$ atque $ds = vdt = \frac{-vdv}{a + nvv}$. Oportet nunc iterum ope harum duarum aequationum tertiam eruere inter s et t, quam non ingrediatur littera v. Hunc in finem analyſin praemittemus poſterioris aequationis $ds = \frac{-vdv}{a + nvv}$: multiplicetur haec aequatio per $-2n$ et habebitur $-2nds = \frac{2nvdv}{a + nvv}$, et ſumendo integrales quantitates $-2ns =$ log. $(a + nnv) +$ quantitate conſtanti, quae pendet a velocitate initiali; ponemus ergo velocitatem initialem $= q$ et erit $-2ns =$ log. $(a + nvv) -$ log. $(a + nqq)$; vel $c^{-2ns} = (a + nvv) : (a + nqq)$; vel $v = \sqrt{\frac{c^{-2ns} \times \overline{a + nqq} - a}{n}}$

II. Poſtquam ita inuenimus valorem ipſius v; poſſumus huius loco ponere inuentum valorem in aequatio-

ne $dt = \frac{-dv}{a + nvv}$, atque ſic ſtatim obtinebimus aequationem deſideratam, nempe $dt = ds\sqrt{\frac{n}{c^{-2ns} \times \overline{a+nqq} - a}}$ vel $dt = \frac{c^{ns}\, ds\sqrt{n}}{\sqrt{(\overline{a+nqq} - c^{2ns}a)}}$. Exinde fluit conſtructio ſequens. Fiat quadrans circuli AGE (fig. 7.) cuius radius $AC = \sqrt{\frac{a+nqq}{a}}$; ſumatur $CF = c^{ns}$, et $CB = 1$: ex punctis F et B erigantur perpendiculares FG et BD, et erit arcus DG diuiſus per $\sqrt{\overline{a+nqq} \times n}$ aequalis tempori inſumto in aſcenſum per ſpatium s.

III. Ex praecedente conſtructione ſequitur eſſe tempus conſtanter proportionale angulo GCD: et cum tempus eſt maximum tunc correſpondet angulo ACD. Caeterum ratio inter AB et BC eo maior eſt, quo velocitas initialis expreſſa per q maior eſt. Vnde ſi haec velocitas ſit infinita euaneſcit BC atque angulus maximus fit rectus habetque proin rationem finitam ad quemcunque alium maximum angulum ACD. Exinde colligo tale theorema nouum atque elegans

Theorema. *Corpus vi infinita verticaliter ſurſum proiectum in medio etiam tenuiſſimo tempore finito totum aſcenſum vtut infinitum abſoluit ſecus ac in vacuo.*

IV. Ex praedictis patet, quaenam futura ſit maxima altitudo ad quam corpus in medio reſiſtenti data vi proiectum verticaliter aſcendere poteſt: habebitur nimirum maxima illa altitudo cum fit $v = o$; eſt autem per §. 1. p. 4. $v = \sqrt{\frac{c^{-2ns} \times \overline{a+nqq} - a}{n}}$; eſt ergo s in hoc caſu $= \frac{\log.\overline{a+nqq} - \log.a}{2n}$. Si hanc quantitatem vnica littera B indica-

dicare velimus, habebitur $\frac{\log.\overline{a+nqq}-\log.a}{2n}=B$ vel $q=\sqrt{\frac{c^{2nB}a-a}{n}}$: quem valorem ſubſtituendo vbique pro q erit radius $AC=c^{nB}$, in quo ſumendo iterum $CF=c^{ns}$ et $CB=1$ erit arcus DG diuiſus per $c^{nB}\sqrt{an}=$ tempori inſumto in aſcenſum per ſpatium s. Ex his liquet nihil poſſe affirmari de temporibus absque praecognito valore ipſius B; hoc autem cognito omnia reliqua facile determinantur. Sed valde difficile eſt in experimentis obſeruare altitudines maximas ad quas corpora aſcenderunt, imo id plane fieri nequit, cum altitudines illae ſunt admodum magnae, quales ſunt in globis ferreis ex tormentis bellicis exploſis. Id ſolummodo obſeruari poteſt exacte, quantum temporis corpora inſumunt in itu ſuo atque reditu, id eſt, quot minuta ſecunda in aere commorentur. Cogitaui igitur de ſequenti problemate nodoſo equidem ſed vtiliſſimo.

Problema I. *Dato tempore, quo datum corpus in medio dato verticaliter ſurſum proiectum, aſcenſum et deſcenſum abſoluit, inuenire altitudinem totam ad quam corpus aſcendit.*

Ex ſolutione primi huius problematis facile deducitur

Problema II. *Datis iisdem inuenire ſeorſim tempus aſcenſus et tempus deſcenſus.*

Neque maiori induſtria opus erit pro ſolutione alterius problematis ſequentis

Problema III. *Datis iisdem inuenire tempus*

quod corpus in vacuo eadem vi proiectum in aſcenſum impenderet atque altitudinem ad quam aſcenderet.

V. Quod ad primum problema, ſolutionem illius dabo per ſeriem quandam. Sit itaque tempus aſcenſus et deſcenſus ſimul ſumtum $=T$ manente ſignificatione reliquarum litterarum. Ergo (per §. 4 part. 4.) erit tempus totius aſcenſus $=$ arcui AD (ſumendo radium $=c^{nB}$) diuiſio per $c^{nB}\sqrt{an}$. Sinus huius arcus eſt linea BD ſeu $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$: exprimam itaque arcum AD per A S. $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$ quod ſignificat, arcum correſpondentem ſinui $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$. Aſſumtis his ſymbolis tempus aſcenſus totius tale erit $(A.S.\sqrt{(c^{2nB}-1)}):c^{nB}\sqrt{an}$. Porro tempus deſcenſus eſt (per §. 3. p. 3.) $=(\log. c^{nB}+\sqrt{(c^{2nB}-1)}):\sqrt{an}$. Quod ſi aggregatum vtriusque temporis aequetur cum dato tempore T habebitur aequatio mediante qua valorem ipſius B colligere dabitur. Eſt autem illa aequatio talis

$$(A.S.\sqrt{(c^{2nB}-1)}):c^{nB}\sqrt{an}+(\log. c^{nB}+\sqrt{(c^{2nB}-1)}):\sqrt{an}=T,$$

cui tentando ſatisfieri poteſt; ſed dabo inſuper methodum, qua ad huius modi aequationum radicem appropinquari poteſt, quousque libuerit, quaeque in omnibus fere caſibus vtiliter adhiberi poteſt.

VI. Immutetur aequatio ita, vt ab vna parte habeatur B purum et ab altera parte ſint quantitates vtcunque compoſitae atque ſignis ſiue a logarithmis ſiue a circulo pendentibus inuolutae, quarum complexum conſiderabo vt functionem quandam ipſius B: In hac functione ſubſtituatur vbique loco B eiusdem functio inuenta per primam aequationem; In noua aequatione idem repetatur; atque ſic habebitur ſeriei ſpecies, donec tandem ſine ſenſibili

ſibili errore loco quantitatis B poſſit quaelibet ad lubitum ſubſtitui. Haec magis fient manifeſta, indicando functionem ipſius B per F(B). Dico itaque conciliandam eſſe aequationi propoſitae huiusmodi formam B = F(B), inque hac poſſe loco poſterioris B poni valorem ipſius, ita vt habeatur B = F(F(B)) et ſic porro, atque haec veſtigia premendo fore vt habeatur ſpecies ſeriei B = F(F(F(F ...... B.......))), vel B = F(F(F(F.... C ....)); poteſt enim loco vltimi B poni quaelibet quantitas, ſi ſaepius ipſius functio repetatur. Notandum tamen eſt, poſſe functionem talem accipi, vt eiusdem repetitio diuergere faciat a vero valore quantitatis quaeſitae quod vbi animaduertitur, alia functio ex aequatione propoſita deducenda eſt, et ſic poterit appropinquari ad valorem ipſius B, quousque libuerit, non obſtante quod aequatio in praecedenti paragrapho data ita ſit compoſita, vt vnicuique ſtatim appareat, fieri fere non poſſe, vt aliquid ex illa cognoſcatur. Nunc ipſam aequationem aggrediar.

VII. Ponatur in aequatione noſtra breuitatis cauſa $c^{nB} = x$, et habebitur

$(A.S.\sqrt{xx-1}) : x\sqrt{an} + (\log. \overline{x+\sqrt{xx-1}}) : \sqrt{an} = T$; ex hac aequatione deducenda eſt functio quae ſit aequalis x. Id vero obtineri poteſt diuerſis modis, ſed cauendum ne talis ſeligatur, quae ſaepius repetita magis magisque recedat ab aſſumto valore ipſius x: poterit ergo aequatio vltimo loco poſita transmutari in hanc

$$A.S.\sqrt{xx-1} = Tx\sqrt{an} - x\log\ (x+\sqrt{xx-1}).$$

vel transferendo ſignum A.S. ad alteram partem id quod fit inuerſione litterarum, ponendo ſcilicet S. A. (quod ſignificat ſinum arcus dati, cuius radius $= x$) habebitur

 $\sqrt{xx-1}$

$\sqrt{xx-1} =$ S.A.(T$x\sqrt{an} - x\log(x+\sqrt{xx-1})$), vel ſumendo quadrata, transferendoque vnitatem ad alteram partem atque extrahendo denique radicem, erit

$x = \sqrt{1 + \square \text{S.A.}(\text{T}x\sqrt{an} - x\log.(x+\sqrt{xx-1}))}$, quae aequatio vt recte intelligatur, dicam eſſe x talem numerum, vt ſi ſumatur radix ex $xx-1$, eidemque addatur, ſummaeque ſumatur logarithmus, qui multiplicatus per x ſubtrahatur de T$x\sqrt{an}$, deindeque differentia conſideretur tanquam arcus circuli, cuius radius $=x$, huiusque arcus accipiatur ſinus, vt, inquam, ſit radix ex quadrato praedicti ſinus vnitate aucto aequalis ipſi x. Caeterum cum de logarithmis ſermo eſt, intelliguntur logarithmi hyperbolici, qui habentur diuidendo logarithmos tabulae Vlaccianae per 0,4342944819.

VIII. Ad illuſtrandam methodum quam dedi paragr. 6. pro approximatione ad radices aequationis vtcunque compoſitae, monſtrabo exemplum pro vltima noſtra aequatione ita perplexa vt prima fronte facile videatur nihil fere ex illa intelligi poſſe. Exemplum autem, quod apponam non eſt ad lubitum ſelectum ſed ad experimentum, cuius deinceps mentionem faciam, accommodatum; quaeritur itaque valor ipſius x in caſu quo T$\sqrt{an}$ eſt $=2,771884$. Pono ſtatim $x=2$, vnde $\sqrt{xx-1}=1,73$, et $x+\sqrt{xx-1}=3,73$, cuius logarithmus $=1,3395$: quem ſubtrahendo de T$\sqrt{an}$, remanet, 1,432384, quod reſiduum iam deberet multiplicari per x, quia autem hic compendium aliquod obſeruandum eſt, indicabo tantum multiplicationem hanc ponendo interim reſi-

reſiduum illud $=$R; atque ita habebitur Rx; haec vero quantitas conſideranda eſt vt arcus circuli cuius radius $=x$; quaeritur ergo quot graduum futurus ſit arcus ille; is reperietur ſumendo quartam proportionalem ad $\frac{710}{113}x$, 360 et Rx, quae quarta proportionalis fit 57, 296R. Poteſt adeoque ſemper negligi multiplicatio quantitatis R per x, ſtatimque multiplicari eadem quantitas R per 57, 296 vt habeatur numerus graduum arcus definiti. Dein ſumatur in tabula ſinuum ille ſinus qui reſpondet iſti arcui, multipliceturque ſinus per $\frac{x}{1000000}$: et ſic habebitur S. A. (Rx) in noſtro caſu $=1, 98$, cuius quadratum vnitate auctum dat 4, 9204, huiusque radix 2, 20; Oportet ergo per regulam §. 6. datam ponere ſecunda vice $x=2, 20$, atque ſingula repetere, quae modo facta ſunt, et ſic fiet $x=2, 37$, dein $x=2, 48$, dein $x=2, 53$, poſtea fit $x=2, 55$ et denique $x=2, 56$, deinde poſui $x=2, 570$, exindeque reſultauit $x=2, 573$. Poteſt itaque tuto aſſumi $x=2, 575$, atque ſic certi erimus hunc numerum vix aberrare in milleſimis a vero numero. In his calculis obſeruandum eſt, eſſe eo exactiores vbique numeros accipiendos, quo maius iam appropinquatum fuerit ad valorem ipſius x. Cognita autem x, faciendum eſt $B=\frac{log. x}{n}$, quia poſitum fuit in praecedente paragrapho $c^{nB}=x$. Vnde ſi n fuerit 0, 0002063 erit B$=$4550.

Et haec ſufficiant pro primo problemate; id tantum addidero, quod ſi x incipiat eſſe tanti valoris, vt vnitas poſſit negligi prae ipſius quadrato, tunc aequatio noſtra

ſtra §. 7. data ſtatim ab initio degenerat in hanc (A.S.x): $x\sqrt{an}$ + (log. x + log. 2) : $\sqrt{an}$ = T; Sed (A.S.x) : x, nihil aliud eſt ob radium $= x$, quam ratio quadrantis circuli ad radium ſeu 355 : 226; habetur itaque 355 : 226 + log. x + log. 2. = T$\sqrt{an}$, vel log. x = T$\sqrt{an}$ – log. 2. – $\frac{355}{226}$, et conſequenter $B = \frac{\log. x}{n} = T\sqrt{\frac{a}{n}} - \frac{\log. 2}{n} - \frac{355}{226n}$, quae aequatio admodum ſimplex eſt, ſed tamen non accipienda, niſi praeuideatur fore x iam numerum grandiuſculum, qualis fit, cum corpus vi vehementiſſima ſurſum iactum fuerit.

IX. Problema ſecundum paragrapho 4to propoſitum poſtulat tempus aſcenſus et tempus deſcenſus ſeorſim. Tempus autem totius aſcenſus eſt (A.S.$\sqrt{(c^{2nB}-1)}$) : $c^{nB}\sqrt{an}$ quod iam ob cognitum valorem ipſius B facile ſumi poteſt; et ſi tempus aſcenſus ſubtrahatur de T habebitur tempus deſcenſus. Vel poterit etiam primo loco inquiri in tempus deſcenſus, quod eſt (log. $c^{nB} + \sqrt{c^{2nB}-1}$) : $\sqrt{an}$, hocque auferri a T vt habeatur dein tempus aſcenſus, et hic alter modus praeferendus eſt priori; quia tabulae logarithmorum frequentiores ſunt tabulis arcuum, et praeſertim quia in vltima operatione, qua valor x proxime fuit determinatus, iam ſumtus fuit logarithmus ex $x + \sqrt{xx-1}$, quem logarithmum diuidendo per $\sqrt{an}$, habetur tempus deſcenſus; nam valores duo proximi ipſius x vix differre debent.

X. Solutio problematis tertii petenda eſt ex paragrapho 4. part. 4. vbi vidimus, eſſe q velocitatem initia-

tialem deſignantem $=\sqrt{\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{n}}$, vnde tempus, quod globus eadem vi proiectus in vacuo in aſcenſum atque deſcenſum impendiſſet, numero minutorum ſecundorum expreſſum eſt $=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{n}}$, ſignificante littera g numerum pedum, quos graue libere a quiete cadendo tempore vnius minuti ſecundi conficit. Ipſa vero altitudo, ad quam globus definita vi ſurſum proiectus aſcendere potuiſſet, eſt $=\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{4ng}$.

XI. Hiſce tribus problematis omnia continentur, quae circa aſcenſum corporum notatu digna cenſui. Caeterum me non monente id cuique manifeſtum eſt, poſitis corporibus ſphaericis, eſſe iterum $n=\frac{27b}{23\,20m}$, vbi m denotat quoties diameter globi continet vnum pedem Angl. et b ſignificat pondus globi fluidi eiusdem diametri cum globo ſolido, vti illud expoſui paragrapho 6. part. 3. et a erit $=2g-b$ ſeu $a=32\frac{2}{9}-b$ per paragr. 8. part. 3. Hiſce meditationibus haud parum vtilitatis accedere poſſe exiſtimaui, ſi ad calculum reuocarem aliquot experimentorum quae Excellentis. Dominus Güntherus coram Academicis quibusdam inſtitui curauit, ex quibus apparebunt ſtupendi effectus, quos aer in corpora grauitatis ſpecificae octies milleſies fere maioris exercere valet; poterunt quoque exinde vires pulueris pyrii exacte inter ſe comparari multaque alia vtiliter colligi. Experimenta autem inſtituta fuerunt quamplurima variique generis, de quibus ea ſeligam, quae in hanc rem facere poſſunt, qualia ſunt cum tormentorum ſitus omni cura

ad perpendiculum accommodatus fuit, ſimul obſeruando quantitatem pulueris pyrii et tempus, quod globus in aſcenſum et deſcenſum impendebat. Continebat autem diameter globi $23\frac{3}{4}$ centeſimas particulas pedis Anglici ipſeque globus vtpote ferreus grauitatis ſpecificae ponetur in calculo reſpectu aeris, vt 7650 ad 1. aerem quoque vbique eiusdem eſſe denſitatis fingemus. Notetur inſuper longitudinem cauitatis internae tormenti fuiſſe $7\frac{7}{10}$ ped. Angl. Patet ergo, eſſe a ad b vt 7649 ad 1; et cum a ſit $= 32\frac{2}{9} - b$ erit $b = \frac{29}{6885}$, et $a = \frac{221821}{6885} = 32,218$. Porro diameter globi dat $m = 0,2375$; ergo $n = \frac{379}{3793635}$ $= 0,0002063$ et $\sqrt{an} = 0,081526$. Hae poſitiones in ſequentibus experimentis erunt eaedem; et ſi ponitur $T = 34$. vti in exemplo 2. habentur poſitiones §. 8.

Quantitas pulveris pyrii in vnciis Holl. expreſſa.	Tempus totum aſcenſus et deſcenſus.	Altitudo ad quam globus peruenit in aere reſiſtente	Tempus aſcenſus in aere reſiſtente	Tempus deſcenſus in aere reſiſtente.	Altit. ad quam globus eadem vi proiectus in vacuo aſcendere poteſt	Tempus, quod eadem vi proiectus in vacuo in aſcenſum et deſcenſum impendit
$\frac{1}{2}$	11	486	5, 42	5, 58	541	11, 6
2	34	4550	14, 37	19, 63	13694	58
4	45	7819	16, 84	28, 16	58750	121

Prae-

Praedictae obſeruationes factae fuerunt in tormento longitudinis 7, 7 ped. Angl. Dein cum eodem tormento eodemque globo, ſed priori diminuto 1, 7 ped. ita vt longitudo animae reſidua eſſet praeciſe 6, ped. ſequentia experimenta inſtituta fuerunt

Quantitas pulueris pyrii numero vnciarum expreſſa.	Num. min. ſec. per quae globus in aere permanſit per obſervationes.	Alt. ad quam glob. in aere peruenit per calculum ped. Angl. expr.	Temp. aſcenſus num. min. ſec. expreſſ. per calc.	Temp. deſc. num. min. ſec. expreſſ. per calc.	Alt. globi eadem vi proiecti in vacuo ped. Angl. expreſſ. per calc.	Num. min. ſec. quae globus eadem vi proiectus in vacuo in aſc. et deſc. impend.
½	8	257	3, 95	4, 05	274	8, 2
2	20, 5	1665	9, 74	10, 76	2404	24, 5
4	28	3187	12, 5,	15, 5	6604	40, 5
6	32, 5	4304	13, 9	18, 6	11810	54, 3
8	38	5643	15, 54	22, 46	22394	74

XII. Vtraque tabula exacto calculo conſtructa fuit: Supereſt vt iam quaedam conſectaria ex ipſis deducamus prae aliis notabiliora: Maximum tempus aſcenſus fuit 16, 84 min. ſec. et poſt hoc tempus aſcenſus maximum eſt 15, 54: differentia eſt tantum 1, 30 m. ſ. cum

 tamen

tamen differentia altitudinum, ad quas in vacuo peruenit globus, ſit minime contemnenda, quippe quae exaequat 2176 ped. Angl. Ex hoc ſolo vnicuique manifeſtum fit, dari tempus, quod globus in aſcenſu vtcunque magno nunquam excedit; quod demonſtraui §. 3 part. 4. tempus maximum autem eſt pro aſcenſu $= \frac{255}{226\sqrt{an}}$, quod in globo noſtro fit $= 19, 27$ min. ſ. Exinde quoque confirmatur ſequens

XIII. Theorema. *Tempus aſcenſus et deſcenſus ſimul ſumtum maius eſt in vacuo quam in pleno; poſitis iisdem ab vtraque parte velocitatibus initialibus: poteſt autem in vtroque caſu eſſe infinitum; quamuis in vacuo infinities maius tunc ſit quam in pleno.*

Quod autem tempus aſcenſus et deſcenſus globi vi infinita in medio aequabili et reſiſtenti ſurſum proiecti infinities minus ſit, quam cum vi eadem in vacuo ſurſum proiectum fuerit, etſi vires grauitatis eaedem fuerint ex illo eluceſcit, quod praedictum tempus in priori caſu ſit $= B\sqrt{\frac{a}{n}}$, dum in poſteriori fit $= c^{nB} \sqrt{\frac{a}{ngg}}$. Sed ſi vis explodens ſit infinita, erit etiam velocitas initialis ſeu q infinita; porro $B = \frac{\log.\overline{a+nqq} - \log.a}{2n}$ per §. 4. part. 4. Ergo etiam B erit infinita exiſtente q infinita. Conſtat vero eſſe c^{B} infinities maiorem quam B, ſi B ſit infinita, ergo etiam tunc $c^{nB}\sqrt{\frac{a}{ngg}}$ erit infinite maior quam $B\sqrt{\frac{a}{n}}$. Q.E.D.

XIV. Theor. *Poſitis iterum viribus explodentibus ſeu velocitatibus initialibus aequalibus et infinitis, erit etiam altitudo ad quam globus peruenit in vacuo infinities maior*

ior

ior altitudine , ad quam peruenire poteſt in medio reſiſtenti. Vtraque vero iterum eſt infinita.

Hae propoſitiones partim iam in praecedenti paragrapho demonſtratae fuerunt, partim eadem methodo adhibitis formulis aſcenſuum quantitates denotantibus demonſtrari poſſunt. Caeterum notari meretur, aerem quem poſuimus ferro 7650 vicibus leuiorem, tantam tamen reſiſtentiam exeruiſſe in globum ferreum, cum 45. min. ſec. in aere commoraretur, vt eidem $\frac{7}{8}$ partes abſtulerit in aſcenſu.

XV. Licet quoque ex tabulis praemiſſis quaedam colligere circa vim pulueris pyrii: Sunt vtique vires impreſſae globis vt altitudines ad quas in vacuo globus aſcendere poteſt: In prima autem tabula vidimus altitudines illas eſſe vt 13694 ad 541 ſeu fere vt 26 ad 1, cum quantitates pulueris erant vt 4 ad 1. Vnde apparet vires pulueris in globum propellendum multo maiori ratione creſcere quam eiusdem pulueris pondera. Rationem huius phaenomeni aliam aſſequi nequeo, quam quod maxima pars pulueris accenſi tranſeat per lumen accenſorium et per hiatum illum inter globum et animam tormenti interceptum, quodque haec pulueris pars inutilis in longe minori adſit ratione, cum ingens pulueris quantitas adhibetur, quam cum parua. Caeterum id quoque ex experimentis colligere licet, conſiderando puluerem vt aerem condenſatiſſimum, ſcilicet vires aeris denſiſſimi in multo maiori ratione, quam denſitates, creſcere; ſubducto enim calculo, inueni aerem naturali quingen-

ties denſiorem elaſticitate praeditum eſſe naturali aeris elaſticitate minimum ſexies millies maiorem.

Adnectam hic alia quaedam experimenta cum mortario inſtituta: Si quis ad calculum ea reuocare voluerit, id eo plane modo, quem indicaui §. 8. fieri poterit: erat autem diameter animae mortarii 1, 05 ped. Angl. diameter globi 1, 01 ped. pondus globi 200 libris Holland.

Quantit. pulv. pyr. in lib. Holl.	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
Tempus, per quod globus in aere manſit in min. ſec.	3	7, 5	12	16, 5	20	23	25

Reliqua, quae Auctor circa motum corporum in mediis reſiſtentibus coram Societate praelegit, in ſequentem Tomum differentur.

NO-

NOVA PLANTARVM GENERA

Auct.

I. C. Buxbaum.

PRoſtant in officinis pharmaceuticis Moſquae fruſtula ſpongioſi cuiusdam vegetabilis, quod Rutheni vocant *Badiaga*, et multi ipſis vſus eſt in liuoribus oculorum aliarumque partium a verberibus, quos huius puluis impoſitus vna nocte tollere dicitur.

Eſt autem haec *Badiaga* planta ſui generis aquis perpetuo ſubmerſa, ſpongioſa, ex multis fibrillis herbaceis quaſi contexta, fragilis et digitis, ſicca inprimis, facile friabilis, qua in re differt a ſpongia, cuius textura tenax et veluti ex lana compacta. Praecipuam autem differentiam conſtituunt grana rotunda, quibus noſtra Badiaga referta eſt, quaeque pro ſeminibus haberi poſſunt. Et haec etiam ipſam ab Alcyonio ſeparant.

Tres hactenus obſeruauimus *Badiagae* ſpecies, quarum prima nobis audit *Badiaga maior.* Figura huius occurrit in Löſelii Flora Pruſſica, vbi appellatur *Muſcus aquaticus*, *Ceratoides*, de quo Breynius in Praefatione Florae Quaſimodogenitae notat, quod ſit *Spongiae ſpecies elegans noua.* Addidit quoque breuem deſcriptionem Löſelius, nullam tamen mentionem facit ſeminum, quod fecit Ruppius in Flora Ienenſi, qui pariter figu-

figuram exhibet. Exhibere quoque talem videtur Plukenetius Tab. CXII. fig. 3. ſub nomine *Spongiae fluuiatilis, anfractuoſae, perfragilis, ramoſiſſimae.* Sed nulla adeſt deſcriptio, quae etiam deſideratur in Raio et Hiſtoria Oxonienſi, vnde nihil certi determinare poſſumus. Granula iſta ſeu ſemina in hac maiori ſpecie rotunda ſunt coloris albidi, in altera parte inſtar lapidum cancri excauata. Odor plantae recentis eſt teter et piſculentus.

Secunda ſpecies conuenit cum praecedente colore ex atro viridi et odore graui, differt vero, quod minor minusque ramoſa et quod granulis croceis et ſplendentibus rotundis, quales in *Hippuride* ſeu *Equiſeto foetido ſub aquis repente* C. B. obſeruatur. Adhaeret limo aut Lenticulae triſculae, praecedens vero lignis adnaſcitur putreſcentibus ſub aquis latentibus. Pigrarum aquarum alumna eſt et a nobis dicitur *Badiaga minor.*

Badiaga cinerea appellari poteſt tertia ſpecies, quae *Spongia ramoſa fluuiatilis Newtoni Rai. Hiſt* 81. Haec reliquis longe elegantior cinereo aut albicante colore ad ſpongiam accedit, ſed friabilitate et fragilitate Badiagae ſimilis. Rami interdum inter ſe coaleſcunt et vacua quaedam ſpatia relinquunt. Semina in hac non vidi, quae an ſimilia cum praecedentibus ferat, neſcio, ob conuenientiam tamen in reliquis huc referre placuit.

Secundum genus plantarum nouum a nobis appellatur *Lupinaſter*, cuius notae ſunt: Folia inſtar Lupini digitata. Flores papilionacei, in capitulum, longo petiolo ex foliorum alis egreſſo, ſuſtentatum, congeſti ſiliquae longae depreſſae, ſeminibus reniformibus foe-

tae,

tae, quae notae ipſum a congeneribus ſatis euidenter ſeparant.

Caules profert hic *Lupinaſter* ſemipede altiores, non raro pedales, rotundos et ſtriatos, virides, paruis ramis ex alis foliorum egredientibus praeditos. Folia longa, acute ſerrata, glauca, non tamen hirſuta, eleganter ſtriata et rigida. Quinque, ſex, ſeptem, imo plura digitatim, inſtar foliorum Lupini, communi inſident pediculo breui, ex vagina ſublutea caulem amplectente prodeunte. In ſummo caule et ramulis naſcuntur flores purpureo coerulei in capitulum collecti, exacte flores Trifolii bituminoſi referentes, pediculis vncialibus aut longioribus ſuſtentati et calyce in multa ſegmenta acuta ſciſſo excepti. Sequuntur ſiliquae longae depreſſae, ſeminibus reniformibus nigris repletae. Creſcit haec elegans planta ad ripas Wolgae intra Aſtrakanum et Czarizinam, ob ſimilitudinem cum Lupino hoc nomen imponere placuit. vid. Tab. XX.

Poliifolia tertium conſtituit genus notasque gerit Flores monopetalos campaniformes globoſos et capſulam in quinque loculamenta diuiſam, ſeminibus foetam ſubrotundis. Et vt breuiter dicamus, Poliifolia eſt plantae genus flore Arbuti, fructu Ciſti.

Mutuati ſumus Poliifoliae nomen ex I. Bauhino, a quo haec planta vocatur *Viti Ideae affinis Poliifolia montana*. A Raio in Synopſ. dicitur *Ledum paluſtre noſtras flore Arbuti*, vbi haec planta optime deſcribitur, cui deſcriptioni nos addimus petiolos flores ſuſtinentes et calycem breuem floribus eſſe concolores, hoc eſt ele-

ganter purpureos. Figura I. Bauhini non adeo bona, nec meliorem multo dat Plukenetius. Occurrit foliis anguſtioribus et latioribus, poſterior vacatur a Scherardo*Ledum paluſtre foliis latioribus ſucculentis* in Raii Synopſ.

Pertinet ad frutices fructu ſicco vbi poſt Chamaerhododendron poteſt collocari. Differt a Chamaedaphne diſpoſitione foliorum et florum imo toto habitu Ledi nomen a Raio impoſitum ideo cum Poliifolia commutaui, quia illud longo vſu iam occupauit *Ciſtus Ledon foliis Roſmarini ferrugineis* C. B. qui iure nouum conſtituit genus. His cognata videtur planta Erica Cantabrica flore maximo, foliis Myrti, ſubtus incanis Tourneſ. Inſt. et Erica Hibernica foliis Myrti piloſis ſubtus incanis Petiv. Gazoph.

Additur hic figura plantae Africanae, quam pro Poliifoliae ſpecie, ex floribus coniecturam faciens, habeo. Dicatur itaque *Poliifolia Africana fruticoſa.* Flores huic purpurei campaniformes, magis patuli quam noſtratis flores, in quatuor lacinias ſecti; ſolia anguſta acuta, caules ſine ordine cingentia. Frutex eſt humilis cortice veſtitus dilute rubente vid. Tab. XXI.

Deſcribit et delineat C. Bauhinus in Prodr. Campanulae ſpeciem quam nominat *Campanulam ſerpillifoliam*, quae etiam ſub Campanulae ſpeciebus recenſetur a Tournefortio in Inſt. Occurrit haec copioſe in ſyluis uliginoſis circa Petropolim, et ego fructum eius examinans ipſum longe a Campulanae fructu diuerſum reperi. Capſula nempe eſt oblonga, ouata, foeta ſemine

ne vnico albo ſimilis figurae, in medio ſecundum longitudinem ſulcato. Haec capſula praeter ea inſtructa eſt duobus foliolis hiſpidis ceu ſcutis, quae omnia melius deſcribuntur quam delineantur ob exiguitatem, hinc nullam figuram adiecimus. Flos etiam tubuloſus magis infundibuliformibus quam campaniformibus accenſeri meretur. Abiecto igitur Capanulae nomine *Serpillifoliam* vocare viſum eſt.

TENTAMEN EXPLICATIONIS PHAENOMENORVM AERIS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

QVanquam ad intima rerum penetralia et cognitionem vltimae partium ſtructurae aditus non ita patet, vt phaenomenorum, quae inde oriuntur ratio reddi queat: Tamen, vt plerumque a Phyſicis factum eſt, a corporum naturalium proprietatibus, quas obſeruauimus, quodammodo ad ipſam eorum ſtructuram concludere licet. Ex qua percepta corporum ſtructura, quo plura phaenomena explicari poſſunt, eo perfectior ea eſt; Et, ſi ex qua Theoria omnes prorſus proprietates, quas quidem co- *M. Sept. 1727.*

gnoſcere impoſſibile eſt, deriuari poſſent, dubium non eſt, quin ea vera ſit, et re ipſa exiſtat.

II. Aeris quam plurima nota ſunt phaenomena, eaque parum a ſe inuicem dependentia; vt is profecto multum praeſtitiſſe cenſendus ſit; qui eadem theoria omnibus ſatisfacere poſſet. Sed theoriam ita maxime conficere conuenit, vt primum excogitetur partium ſtructura, ex qua vna tantum proprietas fluat; id quod plerumque pluribus modis fieri poteſt: et deinceps inquiratur, num ea caeteris quoque proprietatibus explicandis ſufficiat? et, ſi plures primum theoriae conceptae ſunt, tum quaeratur, quae maximae parti vel quae omnibus ſatisfaciat.

III. Inter alias aeris, quas cognoſcimus, proprietates ea inprimis idonea viſa eſt, ſecundum quam ſtructura aeris adornetur, qua aer ſeſe continuo expandere conatur, et reipſa ſe expandit, ſi quae impedimento fuerant, remoueantur. Haec enim aeris elaſticitas prae caeteris proprietatibus maxime explicatu difficilis videtur, vt eius ratione cognita reliqua facile fluere videantur.

IV. Niſi velimus hoc aeris phaenomenon occultae cuidam particularum proprietati et vi inſitae adſcribere, alia via non ſupereſt, niſi vt conatus iſte a motu materiae cuiusdam ſubtilis deriuetur. Conatus autem ſeu vis mortua, vti a Leibnitio vocatur, a materia mota ortum trahere poteſt, ſi ea in gyrum moueatur; quo fit vt quaeuis particula a centro aufugere conetur, atque ita huiusmodi vortex vim ſeſe expandendi acquirat. Hoc vſus principio Cel. Ioh. Bernoulli omnem vim elaſticam ex-

explicare inſtituit in ſchediaſmate *de communicatione motus* Lutetiae nuper impreſſo. Quo vim elaſticam a vi centrifuga materiae ſubtilis oriri aſſerit.

V. Sequor itaque hac in re, iſtam, vti mihi videtur, maxime probabilem elaſticitatis aeris cauſam, atque in hac diſſertatione examini ſubiiciam, quantum aeris ſtructura ex hoc fundamento formata reliquis aeris proprietatibus explicandis ſufficiat, quantumue minus, vt appareat, vtrum aer hanc partium ſtructuram habere poſſit, an vero non? Quo in caſu meliorem oporteret excogitare aeris conſtitutionem.

VI. Suppono igitur aerem conſtare aceruo infinitarum minimarum bullularum, in quibus materia ſubtilis motu circulari gyratur et vi centrifuga bullulas continuo expandere conatur, easque reipſa ſemotis obſtaculis, expandit. Suppono porro bullulas eſſe pellicula obductas; quod quidem opus non eſſet, cum huiusmodi vorticuli ſine pelliculis conſtare poſſent et tamen mutuo non permiſcerentur. Vnus enim alterum impedit, quominus extrauagetur: Attamen propterea bullulas pelliculis obductas ſuppono, quod aer nunquam tam purus ſit, vt prorſus a vaporibus liber ſit. Vapores autem particulas aeris ad inſtar pellicularum obducere valde probabile eſt.

VII. Conſtet itaque aer infinito bullularum minimarum numero, quarum cruſta exterior ſit aquea pro diuerſo aeris ſtatu maior minorue; intra hanc cruſtam gyretur materia ſubtilis certa cum velocitate, quae ſubinde ab alia ſubtiliori adhuc materia omnes poros pene-

 tran-

trante accelerationes nanciſcitur, ne motus tandem conſumatur et euaneſcat. Conſtat enim aerem calorem ſemel acceptum ſenſim amittere, cum autem aer calore rareſiat, ſequitur materiam ſubtilem motu vehementiore agitari; ceſſante ergo calore, indicio id eſt, motum materiae eſſe retardatum.

VIII. Ex hiſce de ſtructura aeris praemiſſis conſequitur, eum in infinitum ſe expandere debere atque extremum raritatis gradum accipere, quando nihil eſt quod eius conatum compeſcat. Sed accedente grauitate, aliter ſe res habebit, eritque, quod vi aeris elaſticae ſe opponet. Quum enim aer ſuperior inferiorem premat pondere ſuo, inferior vlterius ſe expandere nequit, quam quoad eius vis elaſtica, quae expanſione continuo diminuitur, aequalis ſit vi incumbentis aeris comprimenti.

IX. Patet porro ex concepta aeris conſtitutione, eum in infinitum comprimi non poſſe, propter grauitatem ſpecificam, quae in infinitum augeretur. Nam cum in qualibet bullula certa et determinata materiae ſubtilis quantitas comprehendatur, eaque ſemper ſuperficiei adhaereat ob vim centrifugam, neceſſe eſt vt circa centrum ſpatium vacuum relinquatur; id quod eo maius eſſe debet, quo magis aer rarus fuerit: Contra autem continuata aeris compreſſione, id ſpatium vacuum continuo diminuetur, donec tandem prorſus euaneſcat, vltra quem denſitatis gradum aerem comprimere impoſſibile erit.

X. Quod ad velocitatem materiae ſubtilis attinet, opor-

oportet ſingulis eius particulis eandem attribuere velocitatem, neque quae a centro remotiores ſunt, iis maiorem et proprioribus minorem adſcribere velocitatem. Praeterea enim, quod hinc theoria naſcatur experientiae penitus contraria, ob vim centrifugam in maioribus bullulis maiorem, ex hoc elucere poteſt, quod bullulam condenſando vel expanſioni relinquendo velocitas materiae ſubtilis eadem manere debeat, cum nihil ſit, quod eam immutet; Huc enim non pertinet retardatio, de qua §. 6. quae non propter immutationem bullulae, ſed propter reſiſtentiam quandam contingit. Quare cum velocitas materiae ſubtilis non a diſtantia a centro pendere queat neceſſe eſt eam vbique conſtantem ſtatuere.

XI. Sit CAB bullula aerea, quoad fieri poteſt compreſſa, quae proin eſt materia ſubtili vorticoſa penitus repleta. Circumdata vero ſit cruſta aquea ADEB, vt ergo reliquum ſpatium CDE materia ſubtili impleatur. Sit AC $=g$, CD $=b$. Sumatur pro ratione radii ad peripheriem, $1:\pi$, pro grauitate ſpecifica materiae ſubtilis, n et pro grauitate ſpecifica aquae ſeu cruſtae m. Erit capacitas globuli CAB $= \frac{2\pi g^3}{3}$, et capacitas globuli CDE $= \frac{2\pi b^3}{3}$. Ergo ſoliditas cruſtae ADEB $= \frac{2\pi}{3}(g^3-b^3)$. Quamobrem erit maſſa materiae ſubtilis ſpatium CDE implentis $= \frac{2\pi n b^3}{3}$, et maſſae cruſtae $= \frac{2\pi m}{3}\left(\frac{g^3-b^3}{2}\right)$. Et hae maſſarum quanti- *Fig. I.*

tita-

titates in quantum vis expanſis bullulis eaedem manere debent.

XII. Exprimat k altitudinem, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit, materiae ſubtilis velocitati aequalem; Vnde ſequenti modo vis centrifuga, ſeu vis, qua ſuperficies globuli CDE premitur, inuenietur. Sumatur a centro indeterminata $CP = x$ cuius differentiale $Pp = dx$. Erit cruſta ſphaerica craſſitiei Pp et radii $CP = 2\pi xxdx$, quae ſi ducatur in denſitatem materiae ſubtilis, dat maſſam $2\pi nxxdx$, ſeu pondus. Quum haec materia gyretur velocitate ex altitudine k acquiſita, fiat ſecundum Hugenium, vt radius x ad duplam altitudinem, $2k$ ita pondus materiae gyrantis, $2\pi nxxdx$ ad pondus vi centrifugae huius cruſtae aequale, quod ergo erit $= 4\pi nkxdx$. Huius ergo integrale $2\pi nkx^2$ exprimit vim centrifugam ſphaerae radii CP. Conſequenter vis centrifuga bullulae DE erit $= 2\pi nkbb$.

Fig. II. XIII. Conſideremus nunc bullulam aeream quomodocunque expanſam CAB: Cuius extrema cruſta ADEB deſignet materiam aqueam, media DFGE materiam ſubtilem circa centrum gyrantem, et tertia ſeu intima CFG, ſpatium vacuum, vel quod ad minimum materia grauitatis experti ſit repletum. Dicantur $AC = a$, $CD = b$, et $CF = c$. Erit, computo vt ſupra inſtituto, ſoliditas cruſtae extremae ſeu aqueae $ADEB = \frac{2\pi}{3}(a^3 - b^3)$. Dein ſoliditas cruſtae mediae ſeu quantitas materiae ſubtilis $DFGE = \frac{2\pi}{3}(b^3 - c^3)$. Tertio autem capacitas totius bullulae erit $= \frac{2\pi}{3}a^3$. Sit grauitas ſpecifica aeris ſeu totius bullulae, i erit pondus eius $\frac{2\pi i}{3}a^3$, id quod aequale eſt ſummae pon-

ponderum partium, nempe $\frac{2\pi m}{3}(a^3-b^3)+\frac{2\pi n}{3}(b^3-b^3)$. Eſt igitur $ia^3=ma^3-mb^3+nb^3-nc^3$.

XIV. Cum et quantitates materiae aquae, et quantitas materiae ſubtilis aequales eſſe debeant iis, quae ſupra erant inuentae in caſu bullulae maxime compreſſae, ſequentes obtinebuntur aequationes $\frac{2\pi}{3}(g^3-b^3)=\frac{2\pi}{3}(a^3-b^3)$ et $\frac{2\pi}{3}b^3=\frac{2\pi}{3}(b^3-c^3)$. Quamobrem $g^3-b^3=a^3-b^3$ et $b^3=b^3-c^3$. Vnde $b=\sqrt[3]{(a^3-g^3+b^3)}$ et $c=\sqrt[3]{(b^3-b^3)}=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Si haec ſubſtituantur in ſuperioris §. vltima aequatione, reperietur $ia^3=mg^3-mb^3+nb^3$. Vnde $b^3-(ia^3-mg^3):(n-m)$. Et porro $b=\sqrt[3]{(i-m+n)a^3-ng^3):(n-m)}$ ac $c=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Hoc ergo modo ex calculo excluduntur litterae b, c, et b denotantes interiorum bullulae partium a centro diſtantias.

XIV. Vis centrifuga materiae ſubtilis in ſpatio DFGE gyrantis velocitate ex altitudine k producta ex §. 11. inueniri poteſt hoc modo: Vis centrifuga materiae globum radii x implentis inuenta eſt $=2\pi nkxx$. Quare ſe materia ſubtilis totum ſpatium CDE impleret, foret eius vis centrifuga $=2\pi nkbb$, a qua ſi auferatur, vis centrifuga materiae ſpatii CFG $=2\pi nkcc$, reſtabit vis centrifuga materiae ſubtilis in ſpatio FDEG gyrantis, cuius quantitas proin erit $=2\pi nk(bb-cc)$ et ſubrogatis loco b et c valoribus §. 13. inuentis, erit ea $=2\pi nk\left[\left(\frac{(i-m+n)a^3-ng^3}{n-m}\right)^{\frac{2}{3}}-(a^3-g^3)^{\frac{2}{3}}\right]$. Ponatur $b^3=pg^3$ erit, ob $ia^3=mg^3-mb^3+nb^3$, $ia^3=(m-mp+np)g^3$

vnde $g^3 = ia^3 : (m - mp + np)$. Erit ergo pondus vi centrifugae aequiualens $= 2\pi nkaa \left[\left(\frac{m - i + pi - mp + pn}{m - pm + pn}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m - pm + pn - i}{m - pm + pn}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m - pm + pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(mi + pi - pm + pn)^2} - \sqrt[3]{(m - pm + pn - i)^2}\right)$.

XVI. Cum vi centrifuga efficiatur, vt bullulae aereae ſeſe continuo extendere conentur, erit ea aequalis vi elaſticae aeris; ex inuenta igitur aequatione, quanta ſit aeris elaſticitas, inueniri poterit. Verum cum hoc loco primum legem duntaxat, qua aeris vis elaſtica pro diuerſis denſitatis, humoris et celeritatis gradibus immutetur, perſequi conueniat, factor $2\pi n$ vtpote conſtans negligi poterit, eritque vis aeris elaſtica vt $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m - pm + pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(m - i + pi - pm + pn)^2} - \sqrt[3]{(m - pm + pn - i)^2}\right)$ Cum autem ſit $ia^3 = (m - pm + pn) g^3$, loco a in computum duco g, vt ea tanquam conſtans abiici poſſit; Erit ergo $aa = gg \sqrt[3]{\left(\frac{m - pm + pn}{i}\right)^2}$, quo ſubſtituto erit vis elaſtica aeris vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m - i + pi - pm + pn}{i}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m - i - pm + pn}{i}\right)^2}\right)$. Coeteris igitur paribus eſt aeris vis elaſtica vt altitudo k, velocitatem materiae ſubtilis in bullulis gyrantis graui deſcendenti imprimens.

XVII. Verum cum vires aeris elaſticae inter ſe comparantur, id fit aeris vim expanſiuam in eandem baſin agentem explorando. Quamobrem, vt menſuram aeris vis elaſticae, vt conſuetum eſt, exhibeam, neceſſe eſt,

vt

vt preſſionem aeris in datam baſin inueſtigem. Nam, quae hucusque de iſta menſura tradidi, huc non quadrant, quia vis tota globuli aeris elaſtica eſt ſupputata, quae propterea in tanto maiorem baſin agit, quanto magis bullula eſt extenſa. Sunt autem hae baſes vt quadrata radiorum bullularum; Et iis etiam vires elaſticae proportionantur. Quocirca aſſumatur conſtans quidam ſphaerae radius e, fiatque vt a^2 ad e^2 ita vis aeris elaſtica inuenta paragr. praeced. ad vim in datam baſin agentem. Multiplicetur ergo oportet formula praecedens per $e^2 : a^2$ at vero eſt $a^2 = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$. Quamobrem abſoluta diuiſione, abiectisque e^2 et g^2 tanquam conſtantibus obtinebitur vis aeris elaſtica abſoluta, quae erit vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XVIII. Euaneſcat pars bullulae aquea; erit $g = h$ et ideo $p = 1$. Quamobrem vis aeris elaſtica hoc caſu erit $k\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\left(\frac{n-i}{n}\right)^2}\right)$ ſeu multiplicato per conſtantem $\sqrt[3]{n^2}$, erit ea vt $k\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. Ponatur k ſeu velocitas conſtans, vt obtineatur lex elaſticitatum pro ſolis aeris diuerſis condenſationibus, erit tum vis elaſtica, vt $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-i)^2}$. Et hinc ſequentes duco conſequentias. Si ſtatus aeris quam proxime ad maximam condenſationem accedat, erit $n-i$ tantum non $= o$, ergo vis elaſtica hoc in caſu erit vt $\sqrt[3]{n^2}$ i. e. ea erit conſtans. Aere ergo iam vehementer compreſſo, vis elaſtica amplius ſenſibiliter non immutatur.

XIX. Deinde ſi i reſpectu ipſius n valde paruum ſit, ſeu ſi denſitas aeris ad denſitatem materiae ſubtilis admodum exiguam habuerit rationem erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$, conſequenter vis aeris elaſtica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$ ſiue neglecto $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}}$ vt i. Aere ergo valde rarefacto elaſticitates erunt vt denſitates aeris. Quare cum circa aerem naturalem obſeruemus quantumuis is comprimatur elaſticitatem propemodem in eadem ratione creſcere, dubium non eſt, quin aer noſter admodum ſit dilatatus reſpectu materiae ſubtilis, atque rationem ſpecificam aeris ad grauitatem ſpecificam materiae ſubtilis perquam eſſe exiguam.

XX. Attamen cum ea prorſus negligi nequeat, Oportet ſeriei, inquam $(n-i)^{\frac{2}{3}}$ conuertitur, non tantum duos primos, ſed tres accipere terminos, qui variationes obſeruatas ſatis exacte monſtrabunt. Hoc ergo pacto erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i - \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$. Atque hinc vis elaſtica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i + \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$ ſeu multiplicando per $9n^{\frac{4}{3}}$, vt $6ni + i^2$. Dicatur vis elaſtica v fiatque $fv = 6ni + ii$. Ex hac igitur aequatione ope experimentorum, qua circa aeris incrementum vis elaſticae eo continuo magis condenſato, inſtituta ſunt a Boyleo, inuenietur ratio $n : i$. Ex quo intelligetur extremus et maximus denſitatis gradus, ad quem aerem comprimere poſſibile eſt.

XXI. Conſultum ergo eſſe duxi experimenta Boyleana huc tranſcribere, vt ex iis de denſitate ſeu grauita-

uitate ſpecifica materiae ſubtilis concludere liceat, et quamnam ad aerem rationem habeat. Aer primo in tubo ſpatium 12. digit. Angl. replebat poſtea vero cum columna mercuriali comprimebatur altitudines aeris et mercurii ſuperaffuſi in ſequenti tabula exhibentur, cuius prior columna A indicat ſpatium aeris in tubo, et altera B altitudinem mercurii comprimentis aerem: hae vero in digitis Anglic. exprimuntur.

A	B	A	B	A	B
12	0	8	15 $\frac{1}{16}$	5	41 $\frac{9}{16}$
11$\frac{1}{2}$	1 $\frac{7}{16}$	7$\frac{1}{2}$	17 $\frac{15}{16}$	4$\frac{3}{4}$	45
11	2 $\frac{15}{16}$	7	21 $\frac{3}{16}$	4$\frac{1}{2}$	48 $\frac{12}{16}$
10$\frac{1}{2}$	4 $\frac{6}{16}$	6$\frac{1}{2}$	25 $\frac{3}{16}$	4$\frac{1}{4}$	53 $\frac{11}{16}$
10	6 $\frac{3}{16}$	6	29 $\frac{11}{16}$	4	58 $\frac{12}{16}$
9$\frac{1}{2}$	7 $\frac{14}{16}$	5$\frac{3}{4}$	32 $\frac{3}{16}$	3$\frac{3}{4}$	63 $\frac{15}{16}$
9	10 $\frac{2}{16}$	5$\frac{1}{2}$	34 $\frac{15}{16}$	3$\frac{1}{2}$	71 $\frac{5}{11}$
8$\frac{1}{2}$	12 $\frac{8}{16}$	5$\frac{1}{4}$	37 $\frac{15}{16}$	3$\frac{1}{4}$	78 $\frac{11}{16}$
				3	88 $\frac{7}{16}$

XXII. Exhibet igitur haec tubula columnam mercurialem, quae pondere ſuo aerem in datum ſpatium redigit. Hoc vero pondus non ſolum aerem comprimit, ſed ei inſuper adiici debet pondus atmoſphaerae, quod ſimul cum mercurio in aerem agit. Cum ergo ſumma ponderis mercurii et atmoſphaerae ea ſit, vis qua aer comprimitur, erit ea aequalis vi aeris elaſticae Vnde, ſi numeris tabulae B addatur altitudo mercurii ponderi atmoſphaerae aequalis, quam Boyleus ſe 29$\frac{1}{8}$ dig.

 obſer-

obſeruaſſe ſcribit ; habebitur relatio inter denſitates aeris et elaſticitates. Sed cum ad iſtud accurate praeſtandum , exactiſſime altitudinem mercurii athmoſphaeram aequilibrantis obſeruaſſe neceſſe ſit ; idque multis difficultatibus perturbetur : Mallem relicta hac altitudine $29\frac{1}{8}$ dig. ex experimentis ipſis , quum numerus eorum abunde ſufficiat , deducere pondus atmoſphaerae : Sed quia ad hoc accuratiſſima requiruntur experimenta , (in quibus praeſentia haberi nequeunt) altitudinem $29\frac{1}{8}$ dig. retinere cogor.

XXIII. Sed denſitates aeris ſunt reciproce vt volumina eiusdem maſſae aereae ; volumina vero columna A exhibeantur: Ergo denſitates erunt reciproce vt numeri columnae A. Si igitur denſitas aeris in ſtatu naturali ponatur , 1 ; reliquae denſitates habebuntur ſi numerus 12 per reliquos reſpondentes numeros columnae A diuidatur. Deinde elaſticitates, vt vidimus, ſunt vt numeri ſecundae columnae B aucti numero $29\frac{1}{8}$. Cum vero ſit $fv = 6ni + ii$, atque ex obſeruationibus allatis habeantur in quolibet caſu et v et i, duae hae literae f et n determinari debent ; Id quod duobus quibusuis experimentis praeſtabitur. Sumatur ad literam f determinandam experimentum primum;Et erit $i = 1$, et $v = 29\frac{1}{8}$, vnde $29\frac{1}{8}f = 6n + 1$. Ergo $f = \frac{48n + 8}{233}$. Quo valore in aequatione ſubſtituto habebitur $48nv + 8v = 1398ni + 233ii$, conſequenter $n = \frac{8v - 233ii}{1398i - 48v} = \frac{233ii - 8v}{48v - 1398i}$.

XXIV. Vt hinc inueniatur n , oportet experimentorum allatorum aliquod adiungere. Sumatur igitur

tur vltimum, erit $i = 12 : 3 = 4$, et $v = 88\frac{7}{16} + 29\frac{1}{8} = 117\frac{9}{16}$. Vnde $n = \frac{940\frac{1}{2}}{5592} = \frac{3728}{5643} = \frac{2787.5}{51}$ hinc erit $n = 54, 64$. Vt pateat, quantum experimenta inter ſe conueniant vel diſconueniant, accipiatur id quod aer in triplo minus ſpatium eſt redactum; Erit ergo $i = 3$, et $v = 58\frac{12}{16} + 29\frac{2}{16} = 87\frac{7}{8}$. Vnde habetur $n = \frac{2097}{4218} = \frac{703}{4194} = \frac{1394}{24} = 58\frac{1}{12}$. At experimentum quo aer duplo tantum denſior exhibetur paulo plus quam 17 pro valore ipſius *n* exhibet. Ex qua ingenti diſcrepantia intelligi poteſt, quam parum accurata haec ſint experimenta: Id quod praeterea ex ſaltibus, qui in iis deprehenduntur, ſatis colligi poteſt.

XXV. Id autem ex reliquis experimentis calculum inſtituens obſeruaui, inde quo minus aer erat compreſſus, eo minorem ipſius *n* valorem inuentum. Ex quo intelligi poteſt, reliquis in numeris ſaltibus neglectis, vel altitudinem mercurii atmoſphaerae aequiponderantis non ſatis accurate eſſe aſſumtam, vel tubum nimis fuiſſe anguſtum, vt ne facillime quidem mercurius in eo deſcendere potuerit. Prius quidem vix credi poteſt: Sed poſterius eo magis veriſimile eſt, quod tanta inſit difformitas experimentis: Vnde concludi debet, mercurium non ſucceſſiue, ſed quaſi per ſaltus deſcendiſſe. Eandem difformitatem in Boylei experimentis circa rarefactionem aeris aduertens, inde quicquam concludere nolui: ſed plenius de denſitate materiae ſubtilis iudicium tamdiu differam, donec vel accuratiora experimenta in manus veniant, vel ipſi inſtituere vacauerit.

XXVI.

Fig. III. XXVI. Vt autem clarius ob oculos ponatur, qua lege elaſticitates aeris pro diuerſis denſitatibus creſcant, tota res figura geometrica repraeſentari poteſt. Neglectis pelliculis aqueis inuenta eſt aeris vis elaſtica proportionalis $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$: Vnde patet, id per parabolam cubicalem ſecundam praeſtari poſſe. Sit AMC parabola cubicalis ſecunda ſuper axe AB, in qua applicatae PM ſerit in ratione ſubſesquiplicata abſciſſarum AP. Capiatur $AB=n$ et erecta applicata BC, ducatur axi parallela CD. Dico ſi in ea capiatur $CQ=i$, applicatam correſpondentem QM repraeſentare vim aeris elaſticam. Nam eſt $QM=BC-PM$. Sed BC eſt vt $\sqrt[3]{AB^2}$ ſeu $\sqrt[3]{n^2}$, et PM vt $\sqrt[3]{AP^2}$, ſeu, ob $AP=AB-BP$, $(CQ)=n-i$, erit PM vt $\sqrt[3]{(n-i)^2}$. Vt ergo ſit QM vt $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$ cui quantitati etiam, vt patet, proportionalis eſt vis aeris elaſtica.

XXVII. Si ea accipiatur regula, qua vires aeris elaſticae in ratione denſitatum ponuntur; Ex hac figura patebit quantum ea a vero, ſi modo hanc theoriam veram appellare licet, aberret. Ducatur per puncta C et M recta CMR perpendicularem AD ex A in AB ductam ſecans in R; exprimet haec recta diſtantiis ſuis a CD vires elaſticas ſecundum iſtam regulam aeri iuxta abſciſſas in linea CD condenſato reſpondentes. Si igitur QM naturalem aeris vim elaſticam denotet, regula iſta in condenſationibus iuſto minorem exhibebit vim elaſticam, at in rarefactionibus iuſto maiorem, donec vtraque regula aeri infinite rarefacto elaſticitatem nullam attribuat.

XXVIII.

XXVIII. Si certo conſtaret ratio quam n ad i habet, quantum haec regula in quouis caſu a vero aberret, aſſignari poſſet: Nec non aeris vis elaſtica maxima AD, ſeu ratio AD : QM. Ob hunc defectum pono ſaltem $n : i = q : 1$. eritque $n = qi$, adeoque vis elaſtica QM erit vt $\sqrt[3]{q^2 i^2} - \sqrt[3]{(qi-i)^2}$, diuidatur per $\sqrt[3]{i^2}$ vtpote conſtantem, erit vis elaſtica aeris naturalis vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}$. Aſſumatur quiuis alius condenſationis gradus, quo denſitas ſit ad naturalem vt s ad 1. Erit ea denſitas si, adeoque vis elaſtica reſpondens erit $\sqrt[3]{qi^2} - \sqrt[3]{(qi-si)^2}$, erit ea igitur vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-s)^2}$. Vnde ſequitur, elaſticitatem aeris naturalis eſſe ad elaſticitatem aeris s vicibus denſioris vt 1 ad $\frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-s)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}$ ſed ſecundum regulam vulgarem oporteret eſſe vt 1 ad s, ſi $s = q$ tum erit DR $= q$ QM, et AD $= \frac{\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}$.QM. Quia vero q valde eſt magnum reſpectu 1, erit $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{q}}$; erit itaque AD $= \frac{3}{2} q$. QM. Regula ergo ea plus dimidio nunquam a vero aberrare poteſt.

XXIX. Cognita pro quouis condenſationis gradu aeris elaſticitate, poterit inde inueniri quanta eſſe debeat aeris denſitas in data quacunque altitudine. Cum enim aer naturalis comprimatur a pondere aeris ſuperincumbentis, neceſſe eſt, vt, quo altius aſcendatur, aer ob imminutum ibi atmoſphaerae pondus rarior fiat. Nam

vbique eousque aer dilatatur, quoad preſſio aequalis ſit eius elaſticitati. Sit igitur curua BMV ſcala denſitatum aeris, cuius nimirum applicatae PM exprimant aeris denſitates in altitudinibus P. Sit A is locus, quo denſitas aeris eſt maxima, adeoque vbi $AB = n$. Accipiatur locus quicunque P, cuius altitudo AP ſuper A dicatur x; denſitas vero ibi ſeu $PM = y$, erit ibi aeris vis elaſtica vt $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis eſſe debet preſſio ab aere ſuperiore PT orta. Preſſiones autem ſunt vt denſitates et altitudines coniunctim: Quamobrem erit preſſio aeris ſuperioris vt area MPTV i. e. vt $-\int y dx$. Eſt itaque $a\int y dx = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, adeoque $a y dx = \frac{2dy}{3\sqrt[3]{(n-y)}}$; vnde $a dx = \frac{2dy}{3y\sqrt[3]{(n-y)}}$ ſeu poſitio $a = \frac{2}{3}$, erit $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ quae hoc modo integrari debet, vt poſito $x = o$, y fiat $= n$.

Fig. IV.

XXX. Si fiat $n = y$ erit tum dx infinities maius quam dy, ergo tangens in B parallela erit axi verticali AT. Propterea haec curua alicubi punctum flexus contrarii habere videtur; id quod hoc modo inuenietur. Quia eſt $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$; erit $dy = y dx \sqrt[3]{(n-y)}$. Aſſumto dx pro conſtante, erit $ddy = dy dx \sqrt[3]{(n-y)} - \frac{1}{3} y dx dy (n-y)^{-\frac{2}{3}} = o$. Vnde $3n - 3y = y$. Conſequenter $y = \frac{3}{4}n$. Quam ob rem punctum flexus contrarii eo erit loco, quo denſitas aeris eſt ad maximam vt 3 ad 4. Applicetur

cetur igitur $CD = \frac{3}{4}$ AB, erit in puncto D punctum flexus contrarii. Eſt deinde ſubtangens huius curuae $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n-y)}}$. Vnde colligitur ſi y fuerit reſpectu ipſius n valde paruum, tum eſſe ſubtangentem conſtantem; Vt adeo hoc in caſu haec curua cum logarithmica confundatur.

XXXI. Poteſt quidem aequatio pro iſta curua $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ ad quadraturam circuli et logarithmos reduci: ſed inde multo difficilior enaſcitur eius curuae conſtructio, quam ſi per quadraturas conſtruatur. Deſignet igitur AMC parabolam cubicalem ſecundam, vt in fig. 3. ſitque $CD = n$. Aſſumatur aeris denſitas quaeuis in CD, puta CQ, ponaturque $CQ = y$. Cuius applicata reſpondens QM erit $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis accipi $-\int ydx$ debet. Dicatur QM, z, breuitatis ergo: eritque $-ydx = dz$ et $dx = \frac{-dz}{y}$, atque $x = \int\frac{-dz}{y}$. Ducatur PM, quae erit y, et in ea producta, ſi opus eſt, capiatur $PN = \frac{1}{y}$, erit area $PBEN = \int\frac{-dz}{y}$. Quapropter in MQ prolongata accipiatur QL, quae ſit vt area PBEN. Erit punctum L in curua quaeſita. Eſt enim in ea, ducta LH, $CH = LQ = \int\frac{-dz}{y} = x$, et $HL = CQ = y$. Hoc igitur modo curua DLV determinabitur. *Fig. V.*

XXXII. Quae hucusque aeris proprietates ex theoria expoſita deriuatae ſunt, eae nihil abſoluti in ſe continent, ſed tantum rationem dant, ſecundum quam elaſticitas aeris pro diuerſis denſitatibus, humiditatibus et materiae ſubtilis celeritatibus exiſtimari debeat. Verum

rum nunc abſoluti quid tradam altitudinem columnae mercurialis determinaturus, quam datus aereus globulus
Fig. VI. ſuſtinere valet. Sit itaque AB diameter horizontalis bullulae aereae, de qua intelligi debent, quae §. 14. inuenta ſunt. Incumbat ei columna mercurialis ABED altitudinis $AD = f$, quae tanta ſit, vt in aequilibrio conſiſtat cum vi, quam bullula habet, ſeſe expandendi. Haec autem columna in ſingulis bullulae punctis perpendiculariter agit in eius ſuperficiem, idque vi, quae eſt vt altitudo columnae f, et baſis ſeu ſuperficies bullulae, quam premit, atque grauitas ſpecifica coniunctim. Cum autem ſemidiameter AC ſit $= a$; erit circulus maximus bullulae $\frac{\pi aa}{2}$, adeoque ſemiſuperficies eius $= \pi aa$, quae eſt baſis, quae a columna mercuriali premitur. Exprimatur porro grauitas ſpecifica mercurii, reſpectu habito ad reliquas grauitates ſpecificas, litera r, erit preſſio, quam columna mercurialis in bullulam exercet $= \pi aarf$.

XXXIII. Haec autem preſſio deſtrui debet preſſione a vi centrifuga materiae ſubtilis orta, quae etiam in ſingula ſuperficiei puncta aequaliter agit. Quamobrem vis, qua vis centrifuga in haemiſphaerium agit, idque extendere annititur, aequalis eſſe debet vi comprimenti columnae mercurialis. Vis autem ea eſt dimidium vis elaſticae totius bullulae, cuius aequale pondus §. 14. inuentum eſt, $\frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}}\left[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}\right]$; huius ergo dimidio aequari debet pondus columnae mercurialis $\pi aarf$. Vnde ſequens enaſci-

naſcitur aequatio : $rf\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2} = nk$ $[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}-\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}]$ ſeu $f=\frac{nk}{r}$ $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XXXIV. Vt haec aequatio tractatu facilior euadat ſaltem pro naturali aeris ſtatu, pono i admodum paruum reſpectu n; et propterea erit $\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}$ $=\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}+\frac{2(pi-i)}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Atque eodem modo $\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}=\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}-\frac{2i}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis, orietur haec aequatio $rf(m-pm+pn)=\frac{2pnik}{3r}$, vnde $f=\frac{2pnik}{3r(m-pm+pn)}$. Sed ſi ponatur humiditas in aere euaneſcens, erit $p=1$. Tum igitur erit $f=\frac{2ik}{3}$. Si autem aer vaporibus fuerit infectus p eo minor erit vnitate, quo plus vaporum in aere hoſpitatur; ponatur itaque hoc in caſu $p=1-q$, erit $f=\frac{2nik(1-q)}{3r(qm+n(1-q))}=\frac{2ik}{3r}-\frac{2qmik}{3r(qm+n(1-q))}=\frac{2ik}{3r}\left(1-\frac{qm}{qm+n(1-q)}\right)$.

XXXV. Cum autem f indicet altitudinem columnae mercurialis in aequilibrio conſiſtens, exprimet eadem litera f altitudinem mercurii in barometro. Ex inuenta igitur aequatione, datis velocitate materiae ſubtilis in bullulis gyrantis, aeris et materiae ſubtilis grauitatibus ſpecificis, atque quantitate aquae in aere verſantis, inueniri poterit altitudo mercurii in barometro. Nam r grauitas ſpecifica mercurii, vt et m grauitas ſpecifica aquae aliunde iam conſtant. Percurram itaque caſus,

 qui-

quibus mercurius aſcendere, et quibus deſcendere debet; vt inde pateat, quid in aere acciderit et aſcendente et deſcendente mercurio in barometro. Ad hoc cum tantum ratione opus ſit, negligo factorem $\frac{2}{3}r$ tanquam conſtantem, eritque f vt $ik(1-\frac{qm}{qm+n(1-q)})$.

XXXVI. Hinc igitur conſequitur manente facto, ik mercurium in barometro aſcendere decreſcente fractione $\frac{qm}{qm+n(1-q)}$. Haec vero fractio creſcente q etiam creſcit, decreſcente vero q decreſcit: Nam creſcente q elemento dq, fractio creſcet elemento $\frac{mndq}{(qm+n(1-q))^2}$. Quamobrem manente facto ik mercurius in barometro aſcendere decreſcente aeris humiditate; ea vero aucta mercurius deſcendere debebit. Atque hanc puto eſſe rationem, cur aſcenſus mercurii in barometro plerumque coelum ſerenum, deſcenſus vero pluuiam aduerſamque tempeſtatem praenunciet: Illo enim caſu aer maximam partem a vaporibus vacuus eſt, hoc vero iis magis infectus.

XXXVII. Poſſunt quidem aliae concurrere rationes, ob quas mercurius aſcendere vel deſcendere queat immutata vaporum quantitate: Quando ſcilicet factum ik creſcit vel decreſcit. Sed fortaſſe hoc factum ſenſibiliter neque creſcere neque decreſcere poteſt, propter alterutram literam eadem fere ratione auctam, qua altera diminuitur. Nam velocitas materiae ſubtilis, cuius quadratum eſt vt k, augmenta accipit aucto calore, ſed idem calor aerem rarefacit, et quantitatem i minorem efficit, vt ergo factum ik quaſi ſemper conſtans permaneat. Ex

quo

quo intelligitur tute ſemper aſcenſum vel deſcenſum mercurii diminutae vel auctae vaporum in aere verſantium quantitati attribui poſſe, quanquam negari non poſſit et factum *ik* quodammodo effectum humiditatis et augere et diminuere poſſe.

XXXVIII. Neque vero hinc inferre licet, barometrum idem ac hygrometrum praeſtare oportere; cum et hoc humiditatem aeris monſtret. Sed id conſiderandum eſt, barometri effectus a tota aeris maſſa ſeu totius atmoſphaerae ſtatu pendere; hygrometri autem a ſolo aere id ambiente. Quamobrem altitudo mercurii in barometro incrementa accipit, ſi vniuerſus aer a vaporibus liberatur, decrementa vero ſi is vaporibus impraegnatur. Vnde colligitur hygrometrum fere ſummam ſiccitatem oſtendere poſſe, cum altitudo mercurii minima ſit; et ſimiliter hygrometrum humiditatem indicare poſſe, cum mercuriis ſummam altitudinem attigerit. Plus enim immenſa aeris altitudo in barometrum valet, quam infima haec regio, quae ſola in hygrometrum agit.

XXXIX. Si humiditas aeris euaneſcat, habetur iuxta §. 33. haec aequatio $f = \frac{2ik}{3r}$, quam n non ingreditur. Ex ea igitur cum experimentis ratio $r:i$, vt et altitudo f conſtet, inueni poteſt altitudo k, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit ei, qua materia ſubtilis in bullulis aeris gyratur, aequalem; Eſt enim $k = \frac{3rf}{2i}$. Circa quam expreſſionem obſeruo eam excepto coefficiente numero $\frac{3}{2}$ eandem eſſe cum altitudine generante velocitatem, qua ſonus per aerem promouetur, vt ergo velocitas materiae ſubtilis conſtantem habeat rationem ad

velo-

velocitatem ſoni. Hic autem animum abducaere oportet humiditate aeris, qua accedente k alio modo exprimetur.

XL. Obſeruatur altitudo mercurii in barometro a 22. vsque ad 24. et vltra dig Pedis Rhenani. Cum autem aerem a vaporibus vacuum ſupponam, attribuo literae f maximam, quam habere poteſt altitudinem, nempe 2460 ſcrup. Ped. Rhenani. Dein rationem r ad i pono vt 10000 ad 1. Quemadmodum ex experimentis de grauitate aeris concluditur. Quibus poſitis erit $k = \frac{30000 . 2460}{2} = 36900$ pedibus. Adeoque materia ſubtilis velocitate mouetur tanta, quanta a graui ex altitudine 36900 ped. in vacuo deſcendente acquiritur. Si ergo haec materia ſua velocitate in directum pergeret, conficeret vno minuto ſecundo $1518\frac{1}{2}$ ped. Rhenanos.

XLI. Iſto hanc diſſertationem finio, cum deſint accurata experimenta, ex quibus reliqua adhuc deſiderata determinentur, et quibus Theoria haec plenius confirmetur. Incerta eſt adhuc ratio n ad i, ſeu quam habet grauitas ſpecifica materiae ſubtilis ad grauitatem ſpecificam aeris. Ad hanc vero inueſtigandam accuratis experimentis ad id facientibus inſtituendis operam ſtudiumque adhibebo. Quantitas autem n ſi haberetur, facile formulae inuentae ad praxin applicarentur; atque aliis idoneis inſtrumentis adhibendis quouis tempore, quantum aquae in aere contineatur, aſſignari poſſet. Et forſitan multa inſuper alia, ad quae, iis quae ſufficiunt cognitis, quaſi manu duceremur.

PLAN-

PLANTAE DVBIAE
AD SVA GENERA RELATAE
Auct.
I. C. Buxbaum.

PRimo loco ſeſe hic offert *Iuncifolia ſub aquis naſcens, Cochleariae capſulis Raj. Syn.* qui ſatis bene deſcribit. Graminibus adnumeratur in Hiſtoria Oxonienſi, vbi eſt *Gramen Hybernicum, Thlaſpios capſulis Scherardi*, et figura ſine floribus proponitur, nec melior eſt figura quam dat Plukenetius. Ex noſtra obſeruatione eſt genuina Alyſſi ſpecies, quae poteſt nuncupari *Alyſſum paluſtre folio Iunci.* Capſulae ſeminales accurate reſpondent capſulis *Alyſſi foliis Polygoni, caule nudo Tournef. Inſt.* Reperitur ſub aquis et extra aquas inter Scirpos minores et Stellarias vbi aquae ſtagnarunt. Quia in Moriſonii et Plukenetii figuris flores omiſſi ſunt, nos perfectiorem dare allaborauimus vid. Tab. XXIII. fig. 1.

Androſaces ſpeciebus addenda plantula, quam C. Bauhinus *Alſines* ſpeciem fecit et in Prodromo nomine *Alſines vernae Androſaces capitulis* deſcribit. Parkhinſonius equidem *Androſacen minimam* vocat, ſed poſtea obliuioni haec planta tradita, omiſſa etiam eſt in Tournefortii Inſtitutionibus. Iuuat itaque hanc ſuo loco reſtituere et *Androſacen montanam flore minore* appellare. Cre-

ſcit in montoſis Naruae ripis et primo floret vere, vid. fig. 2. Tab. XXIII.

Alia adhuc ſpecie noua genus *Androſaces* augere, ab hoc loco non erit alienum. Eſt illa *Androſace Africana* , *flore magno.* Deſcriptio quantum ex planta ſicca colligere licet ſequens eſt. Radix craſſa, albicans, recta in terram deſcendens. Folia ſubrotunda crenata, leuiter incana , determinate naſcentia , intra quae prodeunt caules aliquot (duo in noſtra) rotundi, virides , foliis deſtituti , niſi ſuperius vbi corolla foliorum exiguorum non crenatorum cingit flores monopetalos quinque fidos albos, vid. Tab. XXIII. fig. 3.

Plukenetius in Phytographia delineat folia plantae quae vocatur *Ceratiae quodammodo affinis Benghalenſis, foliis bigemellis, ſubrotundis ſiliquis admodum intortis et in orbes circumflexis ex minis nigricantibus fructu rubro macula nigra inſignito.* Flores huius ſunt pentapetali ex viridi albeſcentes, tribus petalis latioribus et duobus anguſtioribus in orbem poſitis conflati , calyce pariter quinquefido ſuſtentati , in ſpicam diſpoſiti. Hinc non inepte refertur ad Criſtam Pauonis Breynii ſeu Poincianam Tournef. Inſt. Licet vim aliquam patiatur Tournefortii definitio quatenus ſtamina et calycem adiungit , numeroſa equidem in noſtra adeſt ſtaminum congeries ſed non ſunt incurua et multo breuiora quam in Criſta Pauonis Breynii , inferius quoque calycis folium aduncum deeſt. His adde, noſtrae petala eſſe acuta manifeſte irregularia et colore diuerſa, ſuperius enim viride omnium maximum, cuius lateralia duo paulo anguſtiora, inferiora

vero

vero anguſtiſſima. His non obſtantibus huc referre malui quam nouum fabricare genus, inprimis quia Criſta Pauonis nondum ſpecierum multitudine laborat. Noſtra Tab. XXIV. exhibet ramulum cum foliis minoribus (maiora enim anguſtia tabulae non capit) et ſiliquis iunioribus.

Equiſetis accenſuit Breynius plantam Africanam, quae ipſi *Equiſetum iunceum nigrinodum Capitis bonae ſpei, an Arundinis gramineae aculeatae Alpini genus?* Pertinet potius ad Gramineum genus quam ad Equiſeta quod iam ſuſpicatus eſt Raius. Noſtra figura profert ramum capitulis multis ſquamoſis ſpadiceis onuſtum. Poteſt referri ad Scirpum cuius peculiare genus ſubalternum conſtituit. Dicatur itaque *Scirpus Africanus Equiſeti foliis.* vid. Tab. XXV. Cum hoc idem videtur *Iuncus Africanus lignoſo calamo ad nodos inuolucris nigris circumuoluto, panicula arundinacea ex Prom. bonae ſpei Pluk. Mant.* In hoc ſcirpo habes nodos.

DE PINGVEDINE, PROSTATA, MVSCVLIS, NERVIS, VASIS SANGVINEIS, CORPORIBVS NERVEO-SPONGIOSIS EORVMQVE SEPTO, BALANO PENIS, VRETHRAE BVLBO, EIVSQVE CORPORE SPONGIOSO

Auct.

Io. Georg. Du Vernoi.

M. Nov. 1727.

ANimaduerſione non indignum eſt, quod in diſſectionibus ordinariis, omnium membrorum vnum ſit Genitale, cum quo minus familiares ſunt ſuosque inde oculos et manus magis retrahunt Anatomici. Hocce faſtidium fere vniuerſale eſt, illud que cum ex deſcriptionibus datis, tum praeſertim ex rerum optimarum obliuione obſeruatu haud difficile eſt: Verum enim vero optandum eſſet, vt homines illud ſerio conſiderent, quia alias neceſſe eſt, vt quando praefatae partes vitiatae ſunt, inter imperitorum manus poenas luant. Caeterum, prout viſcerum in genere, ſic Genitalium inueſtigationes, euidentiae et certitudinis cauſa, non in homine ſolummodo, ſed ſi fieri poteſt, in Elephanto et conſimilibus animantibus inſti-

T.XXVI *Penis Elephantinus.*

tui merentur: Namque Penis Elephantinus fere longitudinem hominis, et cruris craſſitiem aequare viſus eſt, quamuis animal pudibundum ſit, vti *Plinius* refert, aetasque Elephanti a me diſſecti 11. annorum tantum fuerit: Ex

quo

quo, praeternaturali forte cauſae tribuendum eſſe videtur, id quod a *Raio* in ſynopſi animalium p. 136 narratur. Penis, inquit, in vagina reconditus minuſculus, nec tan-„ to animali proportionatus videbatur: verum vagina„ diſciſſa expoſitus et liber *Equino* maior erat, non tamen„ longior. „ Quem ab oſſe pubis reſectum ponderauimus et menſurauimus, 80. lb. Ruſſicas pendebat, nec non 6. ped. x. poll longus erat. Ex qua longitudine nec non facili recuruatione verſus caudam, quae breuiſſima eſt, item ex ſtatu eiusdem pendulo, ex defectu teſticulorum et ſcroti, et denique ex roſtro ſeu proceſſu fere recuruo in extremitate parteque ſuperiore balani exiſtente colligi poteſt, Elephantum animal retromingens ac retrocoiens eſſe. Figura eius conica eſt, cuius maior ambitus $2\frac{1}{2}$ ped. in medio $1\frac{1}{2}$ ped. in extremitate $10\frac{1}{2}$ poll. Propterea ſi non longiſſimus, ſaltem craſſiſſimus omnium Animalium Penis iure ſalutari poteſt. Iſta craſſities a quibusnam partibus procedat, haud difficulter detracta pelle inueſtigari poteſt: Nam ipſius pellis litt. A A. craſſities quum exigua ſit, hanc ſingularem praerogatiuam in caeteris animantibus Pene gaudentibus rarius obſeruatam in eo vidimus, nempe adipem ſeu membranam adipoſam, quae poſt ſeparationem telae craſſioris nerueae ei ſuperimpoſitae conſpicua facta eſt, lit. BB. Hoc nouo exemplo manifeſtum eſt, non impoſſibile eſſe, prout Eruditiſſimi Anatomici contendunt, vt in pene aeque ac aliis partibus pinguedo naturaliter colligatur, quod adhuc magis ex eo elucet, quoniam in cute et ſcroto, cum quo continua ſunt penis inuolucra, praefata membrana

Eius pondus et longitudo.

Craſſities.

Pinguedinis copia.

na adipoſa minime deſideratur. Eum vero in finem forte data eſt, vt non ſolum craſſitiem membri augeat, verum etiam, vt contra vim frigoris, quam perferre minus valet, illud tutum ſartumque conſeruet, ſimulque ſiccitatem corporum nerueo ſpongioſorum arceat.

Vtilitas pinguedinis.

Tumorem et craſſitiem Penis maximam efficere videntur maſſae carneae praegrandes, quae quum in parte tam ſuperiore quam auerſa, propter molem earum inſignem valde conſpicuae ſunt, ſilentio minus praetermittendae ſunt. In hac autem figura, quae dorſum penis repraeſentat, ſoli muſculi attollentes ſeu erectores lit. CC. et transuerſales lit. DD. cum portione muſculi bulbum vrethrae comprimentis litt. E. delineati ſunt. Transuerſalium non is erat ſitus et inceſſus, qualis vulgo traditur: Nam ad penis latus cum dextrum, tum ſiniſtrum adeoque inter muſculum bulbi comprimentem et attollentem ſeu Erectorem, inſtar duarum manuum apertarum aut alarum oblique collocati, et prout diſtincte vidi, ſine tendine, fere a ſuo principio, corporibus nerueis toto ſuo progreſſu implantati erant, reliquo ſuo corpore, quod planum ac liberum erat, inſtar alae expanſo. In medio eorum ſedet.

Fig. I.

Muſculi transuerſales.

Corpus globoſum, durum, pomum maius aequans, vnciasque nouem ponderans, quod ſiue ſitus, ſiue numeri, ſiue inuolucrorum, ſiue tandem ſubſtantiae ratione, pro vera Proſtata haberi poteſt litt. F. Bulbo enim vrethrae contiguum, pauloque altius ſupra eum et muſculum vrethrae comprimentem ſitum eſt, vbi proſtatae ſedes ordinaria inuenitur. Deinde illud Proſtatae etiam

Proſtata.

ſatis

ſatis conuenit, vt tunicis admodum craſſis et validis inueſtiatur: Extima, connexioni cum vrethra et corporibus nerueo ſpongioſis inſeruiens tendinea aut neruea viſa eſt litt. *a* eique ex quadam arteria huc tendente plurima vaſa ſanguinea, ſpeciesque corporis ſpongioſi intertexta ſunt. Poſt hanc capſulam, muſculus concauus admodumque craſſus, qui in tres facile partes ſecatur, totum praefatum corpus inueſtit litt. *bb*. Vtraque enim facie antica et poſtica, ſcutum craſſum carneum inſtar Zonae conſpicuum eſt, cuius fibrae tam exteriores quam interiores in obliquum ductae et decuſſatae, verticem mediumque proſtatae circumambiunt, et tantum non ad eius partem inferiorem perueniunt. Ad vtrumque latus appoſita et annexa eſt maſſa carnea, triangularis figurae, eiusdem craſſitiei, quae a ſummo vertice ad imum vsque, aſſumta tereti figura deſcendit, ac infra proſtatam, pone vrethram in praememoratam capſulam tendineam vtraque ſimul inſeri videtur. Poſtquam tres hae faſciae remotae ſunt, mollis et pulpoſa ſubſtantia, quae tenui membranula tota obducta eſt, in conſpectum venit, haecque rurſus non male ad naturam proſtatae referri poſſe videtur. Verum quoad intimam eius ſtructuram, etſi propter amplitudinem res facilis appareat, longo tamen tempore opus fuit, antequam aliquid effatu dignum acquirerem aſſeuerarem que vt verum. In parte igitur poſtica, duo ſpatia parenchymate intermedio ſeiuncta, profunda, ad imum vsque deſcendentia, ac in parte ſua ampliore digiti minoris apicem admittentia, clare et diſtincte conſpectui oblata ſunt, etſi talia in figuris

Inuolucra et corpus ſpongioſum externum proſtatae.

Eiusdem interior ſubſtantia et ſtructura.

Duo ſinus profundi.

ris, et ſcriptis anatomicis inconſpicua ſint. Iſtos ſinus ex membrana firma, lucida, albuginea efformatos, cum ductu Higmoriano in teſticulis non inepte comparare licet. Horum autem ſinuum ope id aſſecutus ſum, vt nunc parenchima praefatis ſinubus circumfuſum paulo clarius cernerem, quam alias ante illorum notitiam ſolebam: Poſt quam enim iniecta ſufficienti aquae copia, materia intus contenta rite expurgata fuiſſet, quoties aerem impellebam, perſpicue obſeruabam, illud nihil aliud eſſe, quam cellularum ſeu cauernularum lit. *cc.* multiplicem congeriem, ex variis pelliculis tenuiſſimis, vario foraminum genere perforatis, efformatam eaque lege diſpoſitam, vt per foramina ſingularia in ſinubus excauata, humor per totam cellularum congeriem effuſus, in praememoratos ſinus delabi, vel e conuerſo, per eosdem iniectus in omnes cellulas diffundi poſſit, prout aliquoties obſeruaui.

Pelliculae cellulas efformantes.

Cellularum ſinuumque vſus.

Porro citatarum pellicularum vnam vel alteram propius examinanti, quaedam ſubſtantia veluti ſub rubra nubecula pelliculis ſuperextenſa apparuit, a qua color inſtar carnis in tota compage excitatur. Sed impoſſibile mihi fuit, inuitis omnibus meis artificiis, perfectiorem eius rei cognitionem aſſequi; Suſpicari ſaltem cum ex colore, tum ex ſucco in cellulis contento, tum ex ductibus excretoriis fas eſt, opificium eſſe ſecretioni aptum, hoc eſt, ex vaſis ſanguinem vehentibus conſtans, de caetero valde occultum et impenetrabile, prout omnia huius generis organa eſſe, ſi mentiri non volumus, ingenue fatendum eſt. Quod ductus excretorios attinet, grauis nunc difficultas ſeſe offert, quae dubitare fecit, an

Quid ſit ſubſtantia pelliculis ſuperextenſa?

vera

vera proſtata, aut aliud glandoſum corpus, an vero aggregatum ex *Cowperi* glandulis dicendum ſit, quoniam notum eſt, in iis animantibus, quae proſtatam obtinent, in ea vrethrae parte cui agglutinata eſt, plures breuiſſimas fiſtulas aream efformantes ſociatim aperiri. E conuerſo, duo ſolummodo emiſſaria ad vtrumque latus vrethrae inter hanc et bulbum deſcendentia, (quorum ſiniſtrum dextro paulo longius eſt) ſtylum aeneum maiorem admittentia conſpicua ſunt: Ad haec, verumontani in hoc loco abſentia: diligens ſed fruſtranea cum aliarum, tum *Cowperi* glandularum inueſtigatio: item duo veſiculis ſeminalibus ſubiecta et contigua globoſa corpora, quae forte proſtatae vices replent, difficultatem ſupradictam adaugere videntur. Propterea, an glandularum *Cowperi* melius quam proſtatae idaea hac in parte congruat nec ne, in dubio relinquitur. *Dubitatio circa hanc glandulam.* *Eius duo emiſſaria.*

Vltimo circa huius glandulae in medio muſculorum transuerſalium poſitum arbitrari fas eſt, in illa actione qua hi muſculi inflati penem retrahunt, preſſionem quoque laterum praefatae glandulae effici, ſine praeiudicio tamen illius potentiae, quam inuolucra muſcularia ei ſuperextenſa immediate exercent. *Hanc muſculi transuerſales comprimunt.*

Muſculorum alterum, omnium maximum par, in dorſo penis conſpicuum eſt litt. CC. Singuli enim brachii humani craſſitiem facile aequantes, poſtquam mediante ligamento craſſo nerueo litt. G anterius ligati ſunt, praegrandem maſſam efformant, qua dimidia membri longitudo contecta eſt. Toto praefato ſpatio non *Muſculi Penem attollentes.*

aliter ac duo cylindri parte anteriore connexi, poſterio- re autem liberi, absque connexione cum corporibus nerueis Peni tam laxe incumbunt, vt ſoluto eorum ligamento, pondere et grauitate ſua deorſum rapiantur ac diuellantur, prout in figura cernitur. Abhinc praedicti ventres ſubito aliam figuram aſſumunt: Nam ex craſſo et peramplo corpore ſubito intermittente, gracilis tendo inſtar pollicis craſſus exit, ac poſtquam aliquot pollicum ſpatio vterque progreſſus eſt, vnus tendo ex duobus conflatur, isque per medium dorſi, (ſicuti vrethra per oppoſitae partis medium), rectilineo curſu ad extremum vsque progrediens tumorem excitat non abſimilem tumori vrethrae, qui in auerſa parte eſſe ſolet. litt. H. Ne ex ſede ſua dimoueatur, ſemicanalis nerueus craſſiſſimus e corporum nerueo-ſpongioſorum fibris transuerſis in arcum ab vno latere in aliud reflexis contextus factus eſt, ad tendinem praememoratum in alio ſemicanali minus profundo ſuperdorſum penis excauato firmius continendum, quia talis rectitudo ad motum genitalis omnino neceſſaria videtur. Prioris ſemicanalis principium denotatur litt. I.

Horum muſculorum tendines in vnum uncti et Canali nerueo inclusi.

Ex hacce deſcriptione euidens eſt, quod ſi in homine aliisque animantibus muſculorum erectorum litt. CC. conſtitutio huicce conformis eſt, actio comprimendi vaſa a Viris ſolertiſſimis excogitata ſatis infirmo talo nitatur, non ſolum quia ad illam compreſſionem duorum muſculorum combinatae vires exceſſiuae ac periculoſae videntur, quum vnius vis ſola ſufficiat; verum etiam, quia tempore quo accidit, tenſio a ſanguine diſtendente

Eorum actio quaenam ſit?

dente facta, iam adeſt, quae proprie ceu vera cauſa compreſſionis praedictae vaſorum, propter auctam membri conuexitatem et duritiem, potius quam muſculorum actionem, conſiderari debet: Comprimatur enim quantacunque vi manus penis flaccidus ad oſſa pubis, flacciditatem conſeruabit, prout experientia teſtatur. Quare concludendum eſt, quoties ſanguinis intra penis corpora nerueo-ſpongioſa influxus oritur, tunc temporis ſolos neruos in vaſa imperium exercere, prout ex ſtructurae intuitu manifeſtum eſt, a quorum proinde robore virilitas, quae vulgo ſignum ſanitatis vocatur, vnice dependet. Muſculi ergo eum in finem ſolummodo conditi videntur, vt impediant ne membrum ſanguine aeſtuante inebriatum vacillet, magisque verſus vnam partem quam verſus alteram inclinet.

Vera cauſa tenſionis penis.

Tertium vulgo dictum par muſculorum, in penis auerſa ſeu poſteriore parte qua muſculorum vrethram comprimentium ſedes conſtitui ſolet, ſpecie praegrandis maſſae in conſpectum venit Litt. E. Eaque quantum diſcernere potui, ex gemino muſculo haud conflata eſt, ſicuti de aliis animantibus hactenus traditum eſt; Verum ſingularem videtur conſtituere muſculum azygon; qui ephippio aut fornici peramplo ſimilis dimidiam penis longitudinem contegens, in ſciſſuram terminatur, qua canalis vrethrae ſub eo latitans, depoſito bulbo, egreditur, iterque ſuum verſus extremitatem penis abſoluit. Bulbus itaque vrethrae in praefati muſculi ſinu, inter hunc et corpora nerueo-ſpongioſa veluti detentus ac incarceratus iacet, eoque prout conſideranti patet, ſpeciali inſtituto

Vnus ſolummodo muſculus vrethrae bulbum comprimens.

Euſd. muſculi actio vt quando canalis vrethrae vna cum bulbo per contractionem praedicti muſculi propius ad memorata corpora nerueo-ſpongioſa vrgetur, eiaculationes praeterlabentium liquorum fortius velociusque peragantur, ad quas ſeu amplitudinis longitudinisque viae, ſeu liquorum ſeminalium cauſa, valida vis neceſſaria erat: quae vt cognoſcatur, modum implantationis ductumque fibrarum reſpectu bulbi conſiderare oportet: Arcus enim pene efformant, qui bulbum *et* amplexi, mox filamentorum coeruleſcentium ſpecie, cum cortice nerueo-ſpongioſorum corporum ſimilibus fibris in longum ductis contexto ſic committuntur, vt fibra- *Inſertio* rum inuicem permixtarum diſcrimen agnoſcere amplius haud liceat.

Accuratam neruorum penem Elephanti ſtipantium inue- *Nerui.* ſtigationem abs me inſtitutam fuiſſe, absque iactantia effari licet, ad quam rara ac infrequens eorundem magnitudo, quae inſtar minoris digiti erat, ſimulque huius Nevrologiae in homine aliisq; animantibus deſideratae vſus generalis me ſollicitauit. Propter easdem cauſas, in ea ſtatim re ſolutione fui, in maximis Elephanti neruis omnem lapidem mouendi, ad cognoſcendum artificium, quo admiranda haec motuum ſenſuumque inſtrumenta, in quorum inueſtigatione Anatome parum honoris aut lucri adhuc reportauit, a natura compaginata ſint. Videre itaque et diſtincte percipere licuit, neruum filorum in circulum diſpoſitorum faſciculum eſſe, quorum copia poſt eorum euolutionem equidem parua, ſingulorum e contra craſſities nec non intermixta pinguedo ad molem nerui conflandam iuſta ac

com-

commenſurata viſa eſt. Pinguedinem neruo incluſam eſſe dixi, quod ſane a nemine antea dictum fuiſſe recordor: E contrario, ei infenſam ac noxiam eſſe, ſenſumque infringere Anatomici timere videntur. Interim veram pinguedinem eamque copioſam obſeruaui, poſtquam exterius inuolucrum Nerui, quo laxe inueſtitur detractum eſſet: Singula enim filamenta, pinguedinis manifeſto folio ſeu lamina obducta in conſpectum veniunt, in qua exilium ſimul vaſculorum ſanguineorum capillamenta diſtincte oculis apparent. Atque ex eo euidens eſt, quam late ſeſe extendat pinguedinis vſus, quae eum forte in finem praefatis filis ſeu chordis nerueis circumfuſa eſt, vt eorum flexilitatem incorruptam ſeruet, vimque adeo impulſuum vehementiorum non nihil retundat, praecaueatque, ne vnum filamentum ab altero comprimatur. Caeterum inter praedicta filamenta ſingularia, quorum numerus in eiusdem magnitudinis neruis ſemper aequalis obſeruatus eſt, ſcil. (9. aut 10.) commercium inſtar ductuum communicantium per transuerſos funiculos intercedit, qui ex vno filamento enati, alteri implantantur, hacque ratione prope canalicularis ſtructurae, (adeoque influxus) idaeam ſubminiſtrant.

Pinguedo in neruis detecta.

Eiusdem vſus.

Nunc de trium inſignium neruorum ſuper dorſo penis deambulantium diſpoſitione admodum curioſa et a nemine indicata, dicendum eſt. Et quidem, quod praefatum numerum ternarium attinet, diu fateor, in ea opinione fui, ac ſi duo tantum nerui, vnus ſuper dextrum, alter ſuper ſiniſtrum corpus nerueo ſpongioſum, peni proprii eſſent, prout apud Anatomicos receptum eſt:

Tres insignes nerui.

ſed reuera tres eſſe poſtliminio cognoui; Praeter duos enim praememoratos, qui ſuper corpora nerueo ſpongioſa in ſocietate vaſorum ſanguineorum incedunt, vnus aeque inſignis in medio prope iunctionem ſeu concurſum praefatorum corporum iacet, qui demum in conſpectum venit, poſtquam vaſa ſanguinea ſuperincumbentia dimota, pelliculaeque plurimae inuoluentes ſeparatae ſunt. Ab iſto prius incipiam, quoniam ſine pari ac plane ſingularis eſt. Is igitur ſpatio praedicto, quod inter duo penis corpora ſpongioſa medium eſt, incluſus, aſſumta loco teretis quam initio habet, figura plana, ſuper tegumentum nerueum ſeu corticem penis, a quo vix diſtingui poteſt, mirum in modum diffunditur, adeo vt ſpatium quatuor digitos latum iuxta totam penis longitudinem, ſolo huius nerui contextu repletum ſit. Iſtius contextus, ac reliquarum rerum quae in Tab. XXVI. fig. 1. continentur, aſpectu, partim naturae magnificentiam, partim delineatorem *Schwenterum** depraedicare fas eſt. Eius enim ſolertiae ac humanitati debemus, quod partium Elephanti internarum figuras optimas ac elegantiſſimas totidem tabulis comprehenſas nunc poſſideamus: Figuram propterea praememorati contextus aſpicere ſolummodo oportet, in qua id clare expreſſum eſt, quod alias vix ac ne vix deſcribi poteſt. Haud enim abſimilis eſt telis acu pictis ſeu texturis artificioſis, incredibili fibrarum neruearum implexu conſtans, ac ea tenacitate

Neruus ſingulari deſcribitur.

*Is p. t. Medici Caſtrenſis officio ornatus ad mare Caſpium diſceſſit. **

**Viri Cl. et amiciſſimi *Ioh. Georg. Gmelin, M. D. diligentia collataque opera toto diſſectionis tempore hic quoque laudandu eſt.*

tate corporibus cauernoſis agglutinatus, vt auelli nequeat. Caeterum tum praefatum ſitum ſeu agglutinationem, tum prodigioſam foecunditatem vnius nerui, tum funiculorum contextum haud ſatis admiratus ſum, quoniam dum caeteri neruorum funiculi mox mox deſcribendi, in gratiam hinc muſculorum, hinc vaſorum ſanguineorum diſpoſiti ſunt, hic otioſi ac ſibi relicti ad voluptatem ſolummodo deſtinati eſſe videntur. Aſt ne errorem committam, id quoque repraeſentandum eſt, quod per huius contextus cancellos ſeu foramina vaſa plurima ſanguinea ex truncis dorſo penis incumbentibus emiſſa, ac corpus vtrumque cauernoſum perforantia transeant, vnde non male actio coniici poteſt, qua ſanguinis tranſitus in veneris actu determinari debet. *Ad voluptatem praecipue inſervit.*

De duobus aliis neruis lateraliter ſuper corpora cauernoſa in ſocietate magnorum vaſorum incedentibus res clara ac euidens eſt, ſi rem (vti decet) contemplari placeat: Vtrique corpori nerueo-ſpongioſo, praeter vnam arteriam duasque venas, neruus maximus cum praedictis vaſis intra vnum faſciculum comprehenſus incumbit, in qua ſocietate recta deorſum, ad penis extremitatem vsque deſcendens, ſingularem reſpectu vaſorum diſpoſitionem, quae pariter hactenus ignota fuit, obtinere viſus eſt: Nam toto itinere, tum e dextro quam ſiniſtro neruo, frequentes propagines abſcedunt, quarum nonnullae ad contextum medium ſupra memoratum tendentes in eo terminantur, aliae ad truncum recurrentes, eumque amplexae compedes efformant, quibus vaſa ſocia veluti carcere includuntur, ac in poteſtatem ſuam reducun- *Caeteri Nervi penis.*

Tenſionis penis cauſa aſſignatur. ducuntur. Quamobrem non ab alia cauſa, quam ab iſta mirabili neruorum diſpoſitione, totum negotium penis tenſionem ſpectans, pendere manifeſtum eſt, absque muſculorum attollentium ſeu erectorum miniſterio, vti ſupra diximus: Nam certum eſt, quod in hoc caſu Natura vaſa ſanguinea intra nerueos cancellos minime incluſiſſet, in quibus neceſſe eſt, vt ad quoslibet neruorum invigorationes cedant, hincque via ſanguinis in corporibus nerueo ſpongioſis, per viciſſitudines libera vel impedita ſit, prout huius luculentum exemplum in Liene proſtat, de cuius vſu aliquando loquendi occaſio dabitur.

Neruorum interior ſtructura inquiritur. Hiſce, quae de Neruis ad penem ſpectantibus, pro inſtituti ratione exarata ſunt, relationem obſeruationum Nevrologicarum; ſeu ſtructurae neruorum intimae, prout in maximis Elephanti neruis, ea conſtanter mihi oblata eſt, deſcriptionem ſubiungo, eamque, vt ſpero, errori minus obnoxiam, quia moles filamentorum inſignis (ſelegi enim talia, quae diametro ſesquilineae aut lineae reſpondebant) ſimulque probitas et praeſtantia inſtrumentorum opticorum perſpecta fuit. Attentio quoque maxima fuit, vt in extractione aut reſectione et expoſitione talium filamentorum, quam minima vis inferretur. Nerui tum crudi, tum longa maceratione emolliti et laxati in hunc vſum vocati. At in vtrisque phaenomena eadem obſeruata ſunt. 1. Effluxum ſucci aut humoris. 2. Tenuiſſima filula. 3. Tubuloſam ſtructuram obſeruare nunquam valui, etſi ſectiones optimae fuerint. 4. Neruo transuerſim ſecto ſuperficiem medullarem obſeruaui, in qua inaequalitas veluti plu-

plurium globulorum ſeu capitulorum conſpicua fuit, quae veſtigia ſeu indicia plicarum mihi viſa ſunt. 5. In nervo per longum ſecto, ſubſtantiam pariter medullarem obſeruaui, in qua ſtriae ſubtiliſſimae, ceu fibrae, parallelae, in longum ductae ac parum protuberantes viſae, quas pro totidem etiam plicis habeo. 6. Vtroque modo diſſectum filamentum, poſtquam ſub microſcopio qua licuit celeritate, expanſum fuit, ecce nihil aliud oblatum eſt, quam tela ſeu membranula pellucida, ſed ineffabili miraeque tenuitatis et pulchritudinis pictura ramulorum nigricantium infinitis modis concurrentium ornata, ac plurimum ſimilitudinis obtinens cum corticali ſubſtantia cerebri, vel cum pia matre ad *Rhuyſchii* methodum praeparata. Quamobrem cogitatio incidit, an ne nervus ex membranis puris, aut laminis medullaribus complicatis ſolummodo conſtet, prout in oculo piſcis Xyphiae a *Summo Malpighio* * obſeruatum eſſe legimus. Rogaui autem, huius Academiae Socios, Viros amiciſſimos *Georgium Bernhardum Bulffingerum* Phyſices Profeſſorem, ac *Fridericum Chriſtoph. Maierum*, vt cum obſervando, tum delineando mecum facere vellent. *Illius* haec de phaenomenis verba ſunt.

An Neruus ex puris membranis aut laminis medullarib. compactus sit? Coniectura.

Poſcis, Vir Eximie, vt ego, quid viderimus, exponam: Gratior Anatomicis Tua erit deſcriptio, propior ſcil. recepto inter ipſos ſermoni, et aptior concluſionibus. Sed intelligo, quid velis? Meum *eſt enarrare viſa, quibus vti* Tuum *erit. Contineo me intra hiſtoriam, ſi bina exceperis vocabula, quae tanquam aliena carcere Rhetori-*

* Epiſt. de Cerebro ad Carol. Fracaſſatum.

torico ( ) concluſi. Nihil dico, niſi quod vterque vidimus; nam et vltima, quae ſingulariter hic enuncio, ex eo tempore iuncti ſaepe ſpectauimus Res omnis huc redit.

Subiecta eſt Microſcopiis fibra nerui Elephantini, ad Diaphragma pertinentis: Eam tunica omni nudatam ſine vitri auxilio ſpectator oculus homogeneam iudicauerat.

1. *In transuerſa fibrae ſectione, cuius diameter vnam facile lineam aequabat, ſuperficies mediocriter aucta albicans apparuit vniuerſa. Quando minoribus vitris amplius atque amplius expanſam vidimus, tractibus obſcurioribus tanquam maculis paſſim interſtincta fuit, latioribus illis et ſtrictioribus, varieque inflexis, nec ad ſenſum cohaerentibus. Area omnis reliqua videbatur limpidiſſima, infinitis farcta corpuſculis niteſcentibus, et roris in modum colores ſpargentibus. Papillularum illa, vel bullularum dimidia ſui parte prominentium, ſpeciem referebant, viſa in extremitatibus ſectionis, aut in fibrillis ab reliqua mole diſtractis. Erant autem eiusmodi puncta micantia ipſis etiam, quos dixi, tractibus obſcurioribus paſſim, ſed rarius, intexta.* (Quare etiam) *vſu venit, vt pro varia ſuperficiei aduerſus ſolem expoſitione magis aut minus obſcurae, latiores etiam aut graciliores viderentur maculae memoratae.*

2. *Secta in longitudinem fibra, iisdemque obiecta microſcopiis, ſimplicibus quidem ſed bonis, vidimus vtique ſtrias in longum porrectas obſcuriores, quarum interſtitia ſplendentibus, vt ante, corpuſculis pleniſſima apparuerunt. Non iſtae multum a parallelismo abludebant: Sed diſtributae erant inaequaliter. Alicubi plures latioresque*

que obſcuri tractus, ſubtiliſſimis tantum lineolis micantibus, neque illis perfecte continuis, diſtincti: Alibi ampliores erant nitidi, in quibus obſcuriores diſcernere lineas hac methodo non licuit.

Hactenus autem obuerſa erat ſoli ſuperficies, quam intuebamur. Poſtea in mentem venit, excurſiones et connexiones horum tractuum melius perceptum iri, ſi inter ſolem et oculum tenuiſſimus fibrae orbiculus transuerſim ſectus interponeretur. Id vtique egregium foret, ſerviretque ad texturam nerui certius definiendam, ſi plures orbiculi ſeſe inuicem excipientes microſcopio examinarentur. Sed intercedit huic conſilio fibrarum tenacitas, qua fit, vt ſine multa ſtructurae ſubtiliſſimae offenſa tales a neruo cylindrulos tenuiſſimos non facile liceat reſcindere. Placuit igitur, ſubtilem a fibra portiunculam cultelli acie, vt fieri tum potuit, ſeparare, et vitro affixam ſuo glutine ad microſcopium aptare compoſitum. Radios ſolares conuexa lens excepit, iisdemque collectis obiectam Soli particulam, quoties opus fuit, illuſtriorem reddidit.

3. *Hic vero texturam apparere mirabilem, tractibus obſcuriusculis, per vniuerſam portiunculam excurrentibus, et mirum in modum ſibi implexis, formantibus inſulas micantibus punctis refertiſſimas. Negabant lumini tranſitum obſcuri tractus, niſi directum illud a ſole veniret. Fines areolarum translucidarum, et obſcuriorum tractuum nitebant conſpicui iridis coloribus; plane vt fieri ſolet, cum res opacae ſoli expoſitae trans vitreum triangulare prisma ſpectantur. Poſui ad latus parti-*

 culae

culae prioris portiunculam membranae, qua neruus integitur. Erat haec vulgari oculo nigricans, in qua nihil licebat diſtinguere. Beneficio collecti luminis, et ſubſidiorum oculi facies apparuit priori ſimillima, niſi quod micantium punctorum longe viſa ſit pauperior haec portiuncula.

4. *Denique repetitis tentaminibus, adhibitaque cura, vt ſecundum fibrae longitudinem abſcinderetur filum microſcopio aptandum, licuit et hoc percipere; ſtrias obſcuriores, quales iuxta nerui longitudinem porrectas vidimus n. 2. etiam inter ſeſe connecti aliis gracilioribus lateraliter diſcurrentibus, rete ſimul elegantiſſimum et inordinatiſſimum referentibus. Vſus ſum microſcopio, quod tenuis pili craſſitiem ad lineae latitudinem extendebat; neq; tamen excedebat tractuum obſcuriorum latitudo ſubtilis pili ſpeciem. Illud dici non poteſt, quanta micantium particularum copia apparuerit, etſi filum hoc nerueum ſimplici oculo tantum non exſuccum videretur. Vltimum hoc phaenomenon, prima vice, qua pluuium tempus erat, ad candelae flammam obſeruaui. Noſti autem, quoties ad id ſereno coelo poſtmodum attendimus, id ſimile nobis et conſtans apparuiſſe.* Hactenus Celeb. Bülffingerus.

Sanguinis et vaſorum copia.

Ea ſanguinis tenacis copia Elephanti genitale inebriatum ac infarctum deprehenſum eſt, vt ex hoc ſolo iudicauerim de copia et magnitudine vaſorum ad tantam vim humorum tam aduehendam quam reſorbendam, prout etiam diſſectio iniectioque comprobauit. Praecipua autem cura fuit, veram inueſtigandi huius partis angeiologiam interiorem exterioremque: vaſorum diuerſas

ſas ſpecies, communicationes, retia, excurſiones per varias regiones penis, conformationemque internam externamue, quae omnia cum in homine, tum caeteris animantibus difficilioris indaginis eſſe compertum eſt. Totus penis, detractis ſolummodo inuolucris communibus, hoc eſt, cute, panniculo et membrana adipoſa, in crate ſeu reticulo vaſis innumeris peramplis incredibili artificio contextis exſtructo, ac ſuper vniuerſum penem omnibus ſuis partibus inſtructum expanſo tam ſtricte inclusus eſt, vt prae ipſo ad partes ſubiectas viam ſeu aditum inuenire impoſſibile ſit. Hocce autem ſpectaculo nil pulchrius ac elegantius in hocce genere imaginari fas eſt. Cuius formatio talis mihi oblata fuit; Ex vtroque balani latere eiusque ſpongioſa ſeu interiori ſubſtantia, tres quatuorue propagines, mediocris ſtyli magnitudine, diſtinctae apparere incipiunt, quae mox prope balanum in duas inſignes venas digito minimo aequales commutabantur. Haec itaque quatuor vaſa, ad latera penis in diſtantia pollicis a ſe inuicem diſpoſita, praefati reticuli firmamenta, et veluti quatuor angulares columnas, (quibus textura reliqua vaſcularis ſuper totum penis ambitum expanſa, interiecta et firmata eſt), conſtituunt: Nonniſi vero ad certam altitudinem (fere dimidii pedis) tales trunci diſtincti manent, et a ſubtiliore interiecto rete eos dignoſcere licet: Nam dum illud ſurſum aſcendit, adeo increſcit tum numerus, tum magnitudo, tum varietas directionum vaſorum reticularium, vt quatuor praefati trunci euaneſcant, diſcernique amplius minime queant, id quod circa medium penis praecipue obſervatur.

Vaſa externa. Eorumque origo, numerus, diviſiones.

et

Inceſſus

vatur. Illa enim regione, nihil quam ductuum duplo maiorum craſſiorumque ſeſe mutuo ſubingredientium variasque cancellorum angulorumue ſpecies ſeu figuras circa totum penis ambitum efformantium contextum cernere licet, in quo hoc ſolummodo diſcrimen oblatum eſt, quod anteriori parte praefati contextus, facies amplior ac plenior ſimulque robuſtior, quam poſterior appareat. Eidem porro magno contextui, alii particulares ſubtilioresque ac minus ampli inter panniculum et adipem conſpicui, ex venis cutis integumentorumque omnium conflati, continuati ſunt; Verbo, tanta reticulorum frequentia paſſim occurrit, vt finem ſeu metam eorum inuenire vix liceat, quam tandem feliciter in medio muſculorum erectorum, vbi tendinea aponeuroſis litt. G. eos iungit, aſſecuti ſumus: Nam eo loco vena magna verſus pubem incedens, quam ideo pudendam ſeu externam appellare libet, conſpicua eſt; In hanc manifeſto, ex vtroque latere, nonnullas propagines ex deſcripto reticulo emiſſas, (quae NB. contractiores ſunt iis, quae dictum reticulum efformant), aſcendere ac terminari vidimus. Vt haecce inſertio, ſimulque contextus, quem deſcripſimus, vniuerſus, vno ictu oculi, ac momento in oculum caderet, prope balanum flatum venae inieci, qui cito omnes plexus et reticula venoſa hactenus deſcripta peruadens, per dictam venam magnam redire viſus eſt. Neque hoc tantum ſufficit: Verum adhuc quaedam alia, circa eundem contextum haud incurioſa mihi oblata ſunt: Nam communicationem admodum euidentem obſeruaui, inter praedictum contextum externum internumque, quoties in-

Praeter magnum Rete penem includens, plures plexus minores.

Vena magna, ex omnium ramorum concursu formata.

inſufflatio facta eſt, qua per vtrumque ſimul flatus penetrauit, idque gemina via, vna per duplicem venae ramum, qui anterius e reticulo abſcedens, ambagioſo itinere muſculos erectores hederae inſtar amplexus, poſterius tendit, ſeſeque penem inter et muſculos praefatos inſinuans, in ſinum maximum vaſorum internorum deſinit. Altera, per ambas itidem propagines, quae mox iunctae breuiori curſu, per medium muſculorum erectorum ad praedicta vaſa interna penetrant, venamque peramplam, de qua mox, efformant. Vlterius in diuerſis huius reticuli locis, ſtructura quaedam valde ſingularis et a communi ſtructura venarum admodum recedens oblata eſt, (prout fig 2. oſtendit), cuius infra occaſione venarum internarum ſimili ſtructura gaudentium, dicendi locus erit. Poſtremo, ſingulae venae in contextu praememorato contentae, peculiari capſula adipoſo-tendinea craſſiore, admodum ſenſibili inueſtitae ſunt, qua fit, vt craſſorum et ampliorum quam reuera ſunt, apparentiam vaſorum obtineant. Quamobrem, in ſubſidium forte venarum data ſunt praefata inuolucra, vt partim calorem foueant, partim vim ac reſiſtentiam ipſarum augeant, ſicuti in pluribus caſibus id neceſſarium ac vtiliſſimum eſſe cenſendum eſt.

Communicatio inter vaſa externa et interna.

In quibusdam locis fabrica venarum ſingularis.

Capſula adipoſo-tendinea.

Eiusque vſus.

In vaſis internis profundius ſitis, ad quae nunc transeundum eſt, talem capſulam (quae autem neruea viſa eſt:) Item talia venarum receptacula, prouti citata fig. oſtendit, contemplari fas fuit, diſtractis tantummodo muſculis erectoribus ſuper ea poſitis, ſicuti in fig. 1. litt. CC. deſignatur.

Vaſa interna.

Venis

Deſcriptio ſingularis fabricae in venis obſeruatae.

Venis itaque, nonnullis locis, machinamentum (quod admodum inſolens viſum) a natura conceſſum eſt, forte ad ſanguinem ex variis penis regionibus refluum, magnaque proinde varietate notatum probe miſcendum; vel compendii gratia etiam, ad ingentis vaſorum multiplitudinis reductionem; ac forte aliquando in talem vſum, vt turgentibus illis conceptaculis, tumor ardorque penis diutius perſeueret, prout eius actioni conuenit. Eſt vero craſſa et ampla cauitas circularis ſeu ſaccus ad verticilli figuram accedens, quoniam in medio foramen piſo aequale vtrinque apertum habet fig. 2 litt. *a*. Cum ramis *bbbb* ei annexis, prout delineatus eſt, conſideratus, potius figuram quadratam mentitur. Eorum maximus facta dimenſione 14. lin. latus, 11. longus erat. Alios atque praecipue illos, qui in venis exterioribus conſpicui ſunt, tum figurae quae magis oblonga eſt, tum amplitudinis reſpectu, cum priore comparare haud licet. Cauitatis (cuius diameter 4. linear.) nuda ac polita ſuperficies valuulis chordisque deſtituta viſa eſt: Neque ad oſtium ramorum vllae valuulae oblatae ſunt: Verum ſolummodo, in notabili ab hacce cauitate diſtantia, in venis ſupra et infra eam incedentibus apparere incipiunt, eaeque coniugatae ſeu duplices, faucibusque ſuis verſus pubem obuerſae ſunt. Omnes porro venae internae, hiſce receptaculis cum ſupra tum infra alligatae ſunt, eorumque ope in duos veluti ordines diſtinguuntur. Quae infra ſunt, illae communi venarum exteriorum ortu, ſcil. ex vtroque balani latere progenitae, ductus vtrinque binos arteriae neruoque antea

Venae internae duplicis ordinis.

de-

deſcripto aſſociatos, ac nerueo-ſpongioſis corporibus ſecundum eorum longitudinem ſuffultos, efformant L. KK, atque hi toto illo itinere, non ſolum longam ſeriem ductuum verticalium breuium, per interualla aequalia e corporum praefatorum interiori ſubſtantia emergentium, ſub forma pectinis annexam habent L. *ddddd*: (Haud enim aliter, quam praedicta forma, venae, arteriae Lit. LL. nerui, L. MMM penis ſubſtantiam ſubeunt: excepta arteria bulbi propria, quae ſecundum eius longitudinem incedit.) Verum etiam frequentiſſimis ramificationibus inoſculationibusque, contextum admiratione digniſſimum, qui ſupra praedictos venarum, arteriarum, neruorumque truncos retis inſtar expanſus eſt, efformant, l. NNNN. cuius retis plures propagines, (praeter duas principales venas ſupramemoratas, L. KK. ſecundum penis longitudinem ad vtrumque latus tendinis muſculorum erectorum communis incedentes), hinc dextrorſum, hinc ſiniſtrorſum, in illis receptaculis ſeu cauitatibus L. OO earumque parte inferiore deſinunt. Ex altera, hoc eſt, ex ſuperiore eorundem receptaculorum parte, nouae ac ampliores venae exſurgentes, (quarum prope pubem abſciſſarum orificia trium fere linearum diametrum aequabant) paucum, quod de itinere verſus pubem reſtat, ſex diſtinctis truncis 1. 2. 3. 4. 5. 6. (tribus nempe in vnoquoque latere) abſoluunt. Quam ob rem, quum iuxta ſex venas tresque neruos hactenus deſcriptos, 7. 8. 9. duae adhuc arteriae, 10. 11. (quarum probe pubem abſciſſarum diameter fere 2. linear. eſt,) ſimul hic conſpicuae ſint, quae de caetero, adinſtar venarum ſociarum, toto itinere per interualla aequidiſtantia verticales propagines L. *eee.* cor-

Non earum trunci, verum rami laterales penem ſubeunt.

Rete venarum elegantiſſimum

Sex earum trunci prope pubem.

Duae arteriae earumque inceſſus interior exteriorve.

poribus nerueo-ſpongioſis ſuppeditando, formam pectinis aut raſtri aemulantur, tranſmiſſis quoque ad partes vicinas, ad integumenta, quibusdam ramis litt. *ffff.* Quumque etiam exterioribus penis partibus vena inſignis pag. 390. bulboq; duae arteriae totidemque venae propriae 15. conceſſae ſint, ſumma omnium truncorum arterioſorum, venoſorum, nerueorumque peni propriorum, ſedecim erit, de quibus iam ſatis.

Summa omnium truncorum.

T. XXVI. Fig. 3. Penis textura interior.

Hiſce perluſtratis, nunc penis textura interior, prout haec per inſtitutas quam plurimas ac diuturnas inueſtigationes mihi oblata fuit, exponenda eſt. Penis capſula eſt Litt. AA conicae figurae, ſepto perpendiculari L. BBB. ſecundum totam longitudinem aequaliter diuiſa, admodum craſſa ac coriacea, duo corpora ſpongioſa L. CC. proprio inuolucro tenui cincta continens. Singulorum diameter tres pollices facile aequabat, praeter craſſitiem capſulae, quae digito minori aequalis erat. Quare haec, cum praefatae craſſitiei, tum ſoliditatis cauſa, ligni duritiem habebat. In eo ſtriae eminentes, rectae ac parallelae, coeruleae, ſecundum longitudinem excurrentes extus conſpicuae ſunt, quibus tota propemodum ſuperficies quaſi contexta ac nonnihil exaſperata eſt: ſed adhuc aliae transuerſales fibrae pariter coeruleſcentes iisdem intermixtae ac intertextae in locis obſeruantur, vbi tendines muſculorum terminari videntur, quibus mutuo ſeſe interſecantibus ac contortis validiſſima textura efficitur. Vaſcula etiam ſubtiliſſima, pellucida, conſpicua ſunt (an lymphatica an ſanguinea incertum), quae facto circuitu, in venam verſus dorſum excurrentem finire viſa ſunt. Atque ex talibus fibris tenaciſſimis textura totius

Eiusque Capſula deſcribitur.

Incertum, an vaſa lymphatica ſint.

totius capſulae compoſita eſt, in qua maiorem ſolummodo fibrarum implexum reſiſtentiamque inueni. Parte capſulae interna ſeu concaua, duplex cauitas, ad locandum vtrumque corpus nerueo-ſpongioſum, conſpicua eſt, eaeque ſepto inſigni adeo interſtinctae ſunt, vt vnum corpus ab altero penitus ſecluſum ac ſequeſtratum ſit, amboque corpora facile extrahere ſic liceat, vt ſeptum immotum ac integrum maneat, pateatque euidenter partem eſſe, a dictis corporibus perfecte diſtinctam ac independentem, etſi de coetero ad eorum functionem forte adiuuandam haud inutilis ſit, prout ex eiusdem haud vulgari textura hariolari licet.

Praedicta capſula in duas cauitates bipartita eſt.

Septum a corporibus ſpongiosis diſtinctum eſt.

Etenim, cum ex ima, tum ſuprema internaque capſulae facie L. DDD, ſecundum totam longitudinem penis, chordarum inſignium, ſibi contiguarum, ſpatiaque *aaaaa* inter ſeſe relinquentium ſeries, vna aſcendens, altera deſcendens exoritur L. EEEE, quae facto breui itinere, propius iunctae ac inuicem confuſae, in vnum planum ſolidum L. FFF. coeunt, quod veluti in ſerra aut pectine vtrinq; dentato, vel lamina vtraque parte in multas lacinias diuiſa, intermedium eſt, cuius propterea craſſities dupla eſt chordarum, duarum nimirum linearum. Originem ſtructuramque interſepti praefatam conſideranti, haud credibile amplius apparet, tanta induſtria conſtructum fuiſſe, vt ſimplicis ac immobilis parietis ſeu clauſtri vices ageret: Ad hoc, opus ne eſt tot fiſſuris laciniiſque ſeu diuiſionibus, a chordarum diſtantia ſeu diuulſione oriundis? An ad cruoris commeatum reciprocum, ab vna cauitate in alteram? Hunc vero ſine tali fabrica Auctores explicant, quamquam vſum

Septi penis conſtructio.

ſum huncce ego haud pen'tus improbem, caeteris ſolummodo, quae hic ſimul obſeruanda ſunt, probe explicatis. Nam tales vtique ac tam grandes fiſſurae ſecundum totam longitudinem, ad ſolum ſanguinis tranſitum minime neceſſariae videntur, quia per pauciora ac minora foramina tranſitus non ſolum, ſed vis etiam ac ſoliditas maior ſepti fuiſſet. Quare per haſce amplas fiſſuras, ceu ianuas apertas, ſubſtantiam corporum ſpongioſorum transmitti, ab vno latere in aliud adeoque confundi, diſtincte obſeruabam *bb*, quod reuera annotatione digniſſimum eſt: Propterea, hiſce viſis, credere incipio, huicce interſepto vim aliam nobiliorem inſitam eſſe, qua ſupramemoratae chordae veluti totidem lacerti, aliquando contrahi ac proximiores effici, ſpatiaque iis interiecta arctari poſſunt, quod toties euenire neceſſe eſt, quoties ſubſtantia ſpongioſa, quae praefatis ſpatiis incluſa eſt, alteraque toti ſepto contigua, compreſſione opus habet. Ad huius compreſſionis neceſſitatem oſtendendam, texturam cauernoſam, ac per eam effuſam ſanguinis copiam vnaque difficultatem regreſſus duntaxat conſiderare oportet. Ad haec, ſi ſtructura corporum ſpongioſorum probe perſpecta ſit, tunc demum res clara ac euidens fiet.

Nouus vſus ſepti exponitur.

A d praefata igitur corpora ſpongioſa L.CC.fig. 1.PP. nunc tranſeundum eſt. Ac primo inuolucro membranaceo-muſculari, quod cum capſula, cui agglutinatum eſt, haud confundere oportet, vtrumq; inueſtitum eſt L. GG: In eo etiam illud pro raro ac inſolenti tenendum eſt, quod fibris carneis rubentibus totum conflatum ſit, haeque adeo conſpicuae factae

Corpora ſpongioſa penis.

Vtriusque inuolucrum proprium carnoſum.

factae ſunt, vt muſculum cauum referrent: De caetero, quamuis in earum contextu quaedam confuſio apparuerit, haud difficile tamen fuit, ſub fibris exterioribus, quas ideo remouere oportet obliquum inceſſum, vt potiorem ac inſigniorem animaduertere. Itaque, hancce texturam non ad ſimplex velamentum, deſtinatam eſſe, euidentiſſimum eſt; ſiquidem craſſiſſimus cortex capſulae ad id ſufficiens videtur: Quid ergo? Ad comprimendum, ſollicitandum vel agitandum contextum ſpongioſum, cuius, vti et ſanguinis in eo contenti, moles magna, vires tamen paruae ſunt: Etſi enim extra huncce contextum viarum libertas integra eſſet, ſanguis tamen intus effuſus, ſola cellularum vi, (prout e ſpongiae vel arundinis indicae exemplo patet) non exprimetur, verum in ſtagnationis periculo verſabitur. *Eiusdem actio.*

Actionem cellularum, e quibus tota compages corporum ſpongioſorum conflata eſt, vna concurrere, non quidem ſimplici coniectura, ſed ex diligenti earum perluſtratione mihi compertum eſt. Etenim, in amputata ac probe mundata orbiculari penis particula, totam compagem perluſtrare fas fuit. (Si e contrario, ſecundum longitudinem diſſectio facta ſit, priorem cellularum faciem ac regularitatem videre amplius non licebat) Eae, veluti in ſpongia aut arundine indica, ſine certo ordine figurave haud diſpoſitae ſunt. Nam, ſicuti primae cellularum areae ſeu orbis, ſic omnium reliquarum ſequentium per totam longitudinem conformatio non diſſimilis apparet; adeoque cauernulae fortuito ac ſine conſilio haud factae ſunt, quemadmodum in homine ac aliis Ani- *Cellularum actio.*

Cellularum ſtructura curioſa. mantibus Anatomici tradunt; Verum ſingulae cellulae, apum alveolis ſimiles, e tenuiſſima membranula conflatae, pentagoni figuram induunt, ſicque inuicem iunctae et adaptatae, nexum contextumque admirabilem efformant. Eodem tempore, inter praedictas cellulas, quaedam filamenta carnea, (Warthono* carnis glanduloſae ſpecies) in conſpectum veniunt, exterioribus ſupra *Fibrae muſculares* memoratis fibris in ſuperficie extima conſpicuis melius comparanda, quam vaſis ſanguineis in rete expanſis: Viſum enim eſt, inter exteriores interioresque fibras aliquem nexum ac cognationem intercedere, nihilque adeo obſtare, quo minus hiſce aeque ac illis communem actionem tribuamus. Vtraque ergo actione cum externa, tum interna opus fuit, ad euitandum, ne ſub tanta mole ſanguinis, cellularum compages cito eneruetur. Fallor, an non propter eandem cauſam illud quoque, de quo nunc dicturus ſum, ab animantium Conditore fabricatum ſit. Trānsuerſi vel obliqui, ac vna extremitate *Chordae.* ſepto, altera capſulae annexi funiculi ſeu chordae, (quales ſupra in deſcriptione ſepti, ac in lamella penis *Balaenae* a Ruyſchio delineatae ſunt,) per interualla, ſecundum totam longitudinem penis, praefatum cellularum contextum peruadunt litt. HH. fig. 1. gg. Harum maximae, ſeu craſſiores in ima ſeu poſteriore penis facie, numero terno aut quaterno locatae ſunt, minores ſeu tenuiores econtra medium occupant. Magno inſuper robore ſeu firmitate, conſtant. Ad haec, totā cellularum compage, iis inſtar uvarum racemi adhaerente, inueſtitae et obſeſſae, iſtam molem vt et vaſorum transuerſos ramos vel-

* Adenograph. Cap. 3.

vti

vti ſuſtinere videntur. Has tamen ad fulciendum ſolummodo conditas eſſe minus credibile eſt : Verum illud potius agere videntur , vt ſpongioſum contextum comprimendo, cruorem exprimant, ac intra venas cogendo, penem ab onere citius liberent.

Chordarum actio.

Reſtat, vt in praefato contextu, venarum arteriarumque ſtatum , prout is mihi oblatus fuit , poſtremo exponam. Poſtquam itaque, in dorſo penis, duplex ſeries venarum arteriarumque (vid. pag. 393.) ad contextum interiorem ſpectantium formata eſt, (quarum altervtra breuibus verticalibusque inſtar clauorum , ſecundum totam penis longitudinem , vtrinque peni infixis ramis, conſtat,) omnes diſtinctis et transuerſum digitum a ſe inuicem diſtantibus foraminibus, penis cauitatem ingreſſi in ea terminantur ; Arterias primo, ad introitum vsque cauitatis perſequenti, nihil aliud conſpectui oblatum eſt , quam iidem rami ſubito extenuati, ac in capillamenta mox viſum effugientia conuerſi , quibus propterea vsque ad eorum inſertionem cognoſcendis, labor fruſtra inſumtus fuit: Quare iniectiones etiam inſtitutae ſunt, quarum vero ſucceſſus haud proſperior fuit; Liquor enim cito quidem cellulas peruadebat plurimas ; ſed per vias obſcuras ac inconſpicuas; Vice verſa, viae reducentes adeo patulae et manifeſtae, et a ſtructura venarum conſueta adeo diſcrepantes viſae ſunt, vt ad ſuſcipiendas mutationes easque ſubitas quibus obnoxius eſt, nouum veluti circuitus genus in pene a natura conſtitutum ſit, prout ex tota eius fabrica fere perſpicuum eſt. Arteriae ſingulari capſula incluſae , lacertis ſimiles ſunt. E contra loco

Vaſorum conformatio in cellulis.

Diſtincta pro ſingulis vaſis foramina.

Arteriae mox diſparent.

Earum capſula.

Venae cribriformes. loco venarum ductus ſolummodo cribriformes, foraminibus vndique pertuſi ac veluti eroſi, a cellulis aegre diſcriminandi, extra capſulam penis, venarum (ſeu breuium tubulorum verticalium) formam induentes, in conſpectum veniunt. Caeterum, in homine, praefata venarum penis proprietas, iampridem inuentore *Ruyſchio* detecta fuit, hodie autem obliuioni data eſt. vid. *Ruyſch.* Obſ. Anat. Chirurg. *pag.* 134. Act. Erud. *A.* 1691. *p.* 69. *Ioh. Guil. Pauli* Annot. ad Ioh. van Horne Microcoſm. Lipſ. *A.* 1707. excuſ. *p.* 243 not. 11 *Godof Bergeri* Phyſ. Med. pag. 453. „ Sanguis per penem et glandem re-„dux non per minutiſſimos ramulos, neque per corpus „reticulare vt loquitur Malpighius regreditur, ſed per ve-„narum patentia et viſibilia oſcula aut foramina. Ve-„nae enim per penem diſtributae, ſi non omnes, ſaltem „tot, quot vnquam offendi, ſunt poris magnis et viſi-„bilibus foraminibus pertuſae cribri inſtar, queemadmo-„dum quoque in vena ſplenica vitulina (vid. fig. 83. et „84) conſpicitur, quod nunquam hactenus obſeruatum „eſſe putem. Eiusmodi venarum perforatio in cauſa „eſt, quod ſanguis per penem redux citiſſime poſſit a pe-„ne regredi, pene momento flacceſcente. Addo, quod *An ob ſanguinis craſsitiem.* quum in pene tum in ſplene, (in quo venarum ſimilis fabrica a *Malpighio* detecta) ſanguis forte e cellulis refluus paulo craſſior et pigrior factus ſit, magna opus ſit meatuum libertate, ne is praeternaturalem moram ageret.

Antequam hiſtoriae penis finem imponam, de altera quoque penis parte eſſentiali, proutin Elephanto ſeſe habet, poſtremo commemorandum eſt. Huic itaque parti, quae verti-

verticem penis imum, totamque vrethram ambit, tria ſucceſſiue nomina tanquam rebus diſtinctis impoſita ſunt, bulbus, corpus ſpongioſum minus, et balanus, etſi nihil aliud ſit, quam homogenea continuataque ſubſtantia, craſſitiem figuramq; variam ab imo vsque ad ſummum fere penis aſſumens. Ea exterius, prope finem penis, (vbi extenuatio magna in eo obſeruatur) ad manus transuerſae longitudinem incipiens, fig. 1. L. QQQ. penis ſolam poſteriorem faciem adeoque ſemicircumferentiam inuoluit, anterius vero L. R. deficit, cuius locum tendo muſculorum erectorum L. H. occupat.) Dumque tumore ſuo, praefata ſubſtantia aequalitatem penis amiſſam reſtituit, neque commiſſura aut interſtitium, quale vulgo inter glandem et penem obſeruatur, apparet, falſam opinionem glandem deficere, prima fronte ante diſſectionem cutis (qua perinde ac reliquum penis corpus obtectus eſt L. S) excitat. Caeterum ſupra iam annotatum fuit pag. 389. eidem ſubſtantiae, quum ſeſe expandere incipit, vaſorum in dorſo penis incedentium extremitates annexas ac implantatas, eaque proinde cum peni, tum balano communia eſſe. Quare etiam, quin hiſce partibus commercium conceſſum ſit, haud dubitaui, non obſtante eo, quod diſtincta quoque ac propria huicce ſubſtantiae vaſa inſint, quae autem vrethrae magis inſeruire viſa ſunt. Porro nerui omnes, quotquot iuxta longitudinem penis deſcendunt (vid. pag. 383.) hic terminantur: Propterea, ſeu papillarum neruearum, ſeu villorum a Celeb. Anatomicis Ruyſchio et Cowpero inuentorum, adeoque ſenſus, qui in hac parte viuidiſſimus eſt, cauſa perſpicua eſt. Ad haec non im-

Deſcriptio Balani.

Eiusque

Cum pene commercium.

Cauſa ſenſus acutisſimi.

Cauſa compag.s ſtrictioris. probabile eſt, quod propter eandem cauſam textura in hoc loco, ſeu in balano ſtrictior ſit, quam in alio, etſi fibrae quoque tendinis ſupramemorati Lit. H. ad idem efficiendum idoneae eſſe poſſint.

Corpus ſpongioſum minus vrethrae. Quum ſic origo ſeu formatio mihi ſatis patuiſſet, obſeruabam vlterius, quod in ſpatio, quod pro tranſitu vrinae et ſeminis perforatum eſt, ſubſtantia conſimilis, ceu appendix, ad totam vrethram inuoluendam, abſcedat, quae propterea cum praecedente continuum corpus efficit. Attamen diſtincto nomine, corpus ſpongioſum minus, ab Anatomicis vocatur, quod eam vrethrae partem, (quae inter muſculum comprimentem ac balanum inclusa eſt), inſtar diploe complectitur; ſoloque proinde craſſitiei ac firmitatis gradu diſcrepat. Poſtquam enim praefatum muſculum attingit, eandem craſſitiem amplius non habet. Haec pars Bulbus appellata eſt, qui tamen nihil aliud eſt, quam extremitas corporis ſpongioſi ſub muſculo comprimente vrethrae, cui firmiter agglutinatur incedens, prout pag. 379. indicaui, ſed in molem maximam tumefacta. Eius namque circumferentia 7. poll. et 2. lin. Longitudo 14. poll. aequabat. Figura eius inſtar magnae paſtinacae: Vrethram inter fig. 1. litt. V. (cui ope vaſorum ſanguineorum annectitur), ac praefatum muſculum Litt. E. ſitus, lateraliterque ad penem fibrarum ſuarum ope firmatus eſt. Texturam denique, quod attinet, exterius capſula fibris carneis obliquis contexta, totum bulbum ac reliquum corpus ſpongioſum vrethrae inueſtit. Interius vero, textura cellularum, (prout in penis capſula), ſed ſubtiliorum in conſpectum

Eiusque Bulbus. Fig. I. Lit. T. Fig. III. Lit. I. et Textura.

ctum venit, quam vtrinque peruadit arteria vsque ad extremitatem excurrens, vrethrae magis quam bulbo inſeruiens, ſicuti vaſcula numeroſiſſima ad eam transmiſſa teſtantur. Plurima porro venarum perexigui ramuli bul bo egreſſi, vtrinque venam N. 15. ſub bulbo ad latus vrethrae incedentem efformant. . . .

DE FRICTIONIBVS CORPORVM SOLIDORVM

Specimen

G. B. Bülffingeri.

I.

NOn admodum diu eſt, quod de *Frictionibus* corporum *ſolidorum* coeperunt aliqui Eruditorum commentari. Vulgares libelli ſtatici exponunt machinarum vires ſepoſitis frictionibus. Inde fit, vt magnos in praxi errores committant, qui potentiarum effectus ex ſolis illis regulis computant: non ſane, quod fallat inutilis theoria, ſed quod eandem minus completam applicari ad naturam contigat. Pretium igitur eſt operae, quae cognoſcendis corporum frictionibus impenditur. Inter Gallos *Amontonius* experimenta inſtituit, et concluſiones intulit nonnullas: quas diuerſo inſtituto examinarunt *La Hirius* et

M. Sept. 1727.

Parentius. In Germania de machinarum frictione nonnihil diſſeruit *Leonh. Chriſtoph. Sturmius* : et *Leibnitius* diuidendo frictionum claſſes aliqua rectius diſtinxit. Laudabilis omnium cura fuit, cui nihil detractum volo. Dabo hoc loco acceſſionum aliquid ; ſi non alio, ſaltim eo fine, vt refricetur Eruditis frictionum memoria.

II. Non eſt incongrua methodus examinandi frictionum momenta, quam *Amontonius* ſequitur in *Memoriis Acad. Scient. Pariſ.* ad A. 1699. Placet tamen varietatis cauſſa nouam adiungere, in quam incidi, cum plana inclinata tractarem alio conſilio. Habebit vnaquaeque ſuos prae altera vſus in diuerſis caſibus ; dantur enim, quibus noſtra videtur eſſe ſimplicior ; dantur etiam, quibus altera eſt commodior. Vtor autem planis inclinatis, quibus impoſita vel quieſcunt vel mouentur corpora, pro magnitudine eleuationis plani, et potentiarum corporibus applicatarum.

III. Inueniatur experimento ſaepius inſtituto angulus eleuationis ille, quo dato corpus plano impoſitum tantum non deſcendit ; deſcenſurum, ſi nonnihil augeatur ; et haeſurum cum aliqua aduerſus deſcenſum renitentia, ſi minuatur angulus eleuationis. Dicatur autem hic angulus breuitatis cauſſa *angulus quietis*. Eoque inuento ſic inferatur :

Vti *ſinus totus* ad *ſinum rectum anguli quietis* ; ita *pondus abſolutum* eſt ad *frictionem* eius *ſuper plano ad praedictum angulum inclinato*.

Atque iterum :

Vti *ſinus totus* ad *tangentem anguli quietis* ; ita *pon-*

pondus abſolutum eſt ad *frictionem* eius *ſuper plano horizontali*, cum trahitur in directione ad horizontem parallela.

IV. *Demonſtratio* propoſitionis vtriusque perfacilis eſt. Sit AB, *ab*, planum inclinatum: BAC, *bac* angulus quietis memoratus, et corporis P, *p*, pondus abſolutum $=a$: Erit per ordinarias de plano perfecte polito demonſtrationes, vis corporis P nitens ad deſcenſum in directione plano parallela $\frac{a.DG}{DF}=\frac{a.BC}{AB}$; quodſi enim ponderi P in directione memorata GDH opponatur aliud pondus $Q=\frac{a.BC}{AB}$, quieſcet corpus P ſuper plano polito. Iam in plano aſpero in vicem ponderis Q ſubit frictio ponderis P, faciens aequilibrium cum vi deorſum nitente. Itaque frictio corporis $P=\frac{a.BC}{AB}$, hoc eſt, vti ſinus totus AB, ad ſinum rectum anguli eleuationis BC; ita pondus abſolutum *a*, ad frictionem corporis ſuper plano ad dictum angulum inclinato, *quod erat primum*. *Fig. I. et II.*

V. Iam vt idem transferatur ad planum horizontale: debet grauitas naturalis ſecundum lineam DF nitens reduci ad grauitatem fictitiam, quae agat ſecundum directionem DE, vt adeo planum inclinatum AB ſit illius reſpectu horizontale: ſiue generaliter loquendo, vice ponderis naturalis abſoluti *a* debet conſiderari vis alia *b*, qua corpus P ad planum AB apprimitur perpendiculariter. Hic notum eſt ex ſtaticis, pondus illud vicarium, ſiue vim appreſſionis *b* eſſe $=\frac{a.DE}{DF}=\frac{a.AC}{AB}$. Frictio autem huius ponderis, cum trahitur in directione ad pla-

num AB parallela, modo inuenta eſt $= \frac{a.BC}{AB}$. Adeoque pondus vicarium, ſed abſolutum *b* erit ad frictionem eius tanquam tracti ſuper plano horizontali in directione ad planum parallela vti $\frac{a.AC}{AB} : \frac{a.BC}{AB} = AC:BC$, hoc eſt, pondus quodcunque abſolutum eſt ad frictionem eius horizontalem, vti ſinus totus AC ad tangentem anguli quietis BC; *quod erat ſecundum.*

VI. Poſſunt haec duo theoremata inſeruire examini propoſitionum hactenus publice exhibitarum. *Amontonii* ſententia eſt, ab aliis tamen non ſemel reuocata in dubium, quod 1 *frictiones* ſint *preſſionibus proportionales*; quod 2. aequentur tertiae parti preſſionum; et quod 3 ſuperficiei magnitudo frictionem ceteris paribus nec augeat, nec minuat. Poſſunt ſingulae hae propoſitiones examinari facile per plana noſtra inclinata; et, ſi quae abludat a vero, emendari. Incipiamus a facillimis.

VII. In *duobus*, quos memoraui §. 4. et 5 caſibus ſunt vtique, ceteris omnibus paribus, frictiones proportionales preſſionibus. Eſt frictio ſuper plano inclinato $= \frac{a.BC}{AB}$, et frictio ſuper horizontali $= \frac{a.BC}{AC}$, adeoque illa ad hanc $= AC : AB$, hoc eſt, vti preſſio corporis P ſuper planum hoc inclinatum ad preſſionem eius ſuper planum horizontale.

VIII. An id *de omni ſitu plani* vtcunque inclinati verum ſit, manente corpore et plano eodem: ita experimentis definiri poteſt. Fingatur, frictiones eſſe preſſionibus proportionales, et computetur, ſi angulus elevationis ſit maior, quam qui §. 3. inuentus eſt, quantum

pon-

pondus S requiratur, ad retinendum corpus P in quiete ſuper plano inclinato; Sin minor fuerit angulus eleuationis, quantum pondus R requiratur ad hoc, vt corpus P tantum non deorſum trahatur ſuper plano ſuo. *Fig. III.*

IX. Sit preſſio ad frictionem $= m:n$. Pondus naturale abſolutum $= a$. Sinus totus $= m$. Sinus rectus anguli eleuationis $= x$. Erit preſſio corporis P in planum $= b = \frac{a\sqrt{(mm - xx)}}{m}$ §. 5. adeoque frictio eius $= \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm}$. Haec frictio addita ponderi S debet aequare niſum corporis deorſum ſuper plano. Hic niſus $= \frac{ax}{m}$ §. 4. igitur $S = \frac{ax}{m} - \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm}$. Ex aduerſo preſſio ponderis P deorſum $(= \frac{ax}{m})$ vna cum pondere R aequatur frictioni corporis: itaque $R = \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm} - \frac{ax}{m}$.

X. *Primum* obtinet, quando x maius eſt valore formulae $\frac{nm}{\sqrt{(mm + nn)}}$: *Secundum*, quando x minus eſt. Cum vero $x = \frac{nm}{\sqrt{(mm + nn)}}$ euaneſcunt pondera S et R, manetque aequilibrium inter frictionem et niſum corporis deorſum: *Inſervitque* haec *formula*, *tum* ad inueniendam ex dato angulo relationem frictionis ad preſſionem, *tum* ad determinandum ex data hac relatione angulum quietis. Eſto enim ex *Amontonii* ſententia preſſio ad frictionem, vti 3 : 1. emerget $x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{3.162} = \frac{1000}{1054}$. Igitur dicendum: vti ſinus totus m, ad ſinum rectum x $(= 3 : \frac{1000}{1054} = 3162 : 1000)$ ita ſinus totus tabularis 100000 ad ſinum rectum eleuationis quaeſitae, 31657, cui in tabulis reſpondet angulus 18. grad. 27. min. Sit porro ex ſententia *Parentii* $m : n = 20 : 7$, erit

$x =$

$x = \frac{nm}{\sqrt{(mm+nn)}} = \sqrt{\frac{140}{449}} = \frac{140}{21.189}$. Vnde fit $m : x = 20 : \frac{140.000}{21.189} = 423.78 : 140.00 =$ ſinus totus 100.000 : ſin. eleuationis quaeſitae 33036, cui in tabulis reſpondet angulus $19^\circ\ 17'$.

XI. Si angulum hucusque mutauimus manente pondere, poteſt nunc *pondus mutari* manente angulo. Si enim frictiones ſunt proportionales preſſionibus : debet angulus quietis manere vnus idemque , poſita ſuperficie eadem et aucto pondere abſoluto. Manente enim angulo preſſiones ad planum ſunt proportionales ponderibus abſolutis : ſunt etiam niſus corporum , quibus deſcendere ſuper plano conantur. Obuia haec ſunt omnia : velim autem, vt in experimentis caueatur a circumſtantiis alienis.

XII. Inſerviet etiam haec methodus ad *comparanda* inuicem diuerſi generis *corpora*. Eandem fere frictionem eſſe ferri, cupri , plumbi , ligni mutuo combinatorum , ſi axungia illinantur , annotat *Amontonius*. Id etiam examinari hac methodo poteſt , et cum et ſine axungia : nimirum quaeritur , an idem ſit pro omnibus angulus quietis?

XIII. Denique eadem anguli conſtantia requiritur pro corporibus homogeneis et aequaliter politis, aeque aut minus grauibus, *ſed diuerſa ſuperficiei extenſione* gaudentibus ; ſi ex vero dixit Vir Egregius, quod diuerſa ſuperficiei extenſio frictionem ceteris paribus nec augeat nec minuat. §. 6. Poteſt id tentari cum corporibus aeque grauibus: poteſt vero etiam cum inaequaliter grauibus

bus ob §. 11, modo ſint homogenea, et aequaliter polita.

XIV. Notari etiam meretur, poſſe hac ratione inueniri relationem frictionum in motu *voluente*, et *radente*. Poſſunt enim ſuper eodem plano inclinato ſucceſſive poni corpora, quae voluendo ſe deſcendunt et quae radendo. Si enim pro vtroque caſu inuenias angulum quietis: erit frictio corporis ſeſe voluentis fig. 2. $=\frac{a \times bc}{ab}$ et corporis radentis fig. 1. $=\frac{a.BC}{AB}$. Eſt igitur illa ad hanc, pro corporibus in experimento adhibitis $=bc \times AB : BC \times ab$ hoc eſt (propter $ab=AB$) $=bc : BC$, hoc eſt, vti ſinus recti angulorum quietis.

XV. Praeterea, poſito frictiones eſſe preſſionibus proportionales, inquiri poteſt, *quantum* requiratur *Pondus* T ad corpus P ſuper plano ſuo ſurſum trahendum in directione plano parallela. Patet enim, pondus T debere nonnihil excedere corporis niſum deorſum, et frictionem eius ſuper plano: proximus igitur ante aſcenſum hic caſus eſt, quando T = frictioni et niſui ſimul ſumtis, hoc eſt ex §. 9. cum $T=\frac{an\sqrt{(mm-xx)}+amx}{mm}$. Vnde denuo ex dato T et x definiri poteſt relatio frictionis ad preſſionem; vel ex data relatione et angulo inueniri pondus T; vel ex data relatione et pondere T inueniri angulus eleuationis.

XVI. Habet autem haec conſideratio *maximum* aliquod: differentiata enim ſolito more, et reducta aequatione per *methodum de maximis et minimis* prodit $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$ pro maxima vel minima ſurſum trahendi

difficultate. Sed maximam eſſe patet vtique ex valorum ſubſtitutionibus. Sit enim ex. gr. $m:n=3:1$ ex §. 10. atque $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, vel $=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn-1)}}$ vel $\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$ erit in primo caſu difficultas $=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ponderis abſoluti; in ſecundo $=\frac{8}{3}$, in tertio $=\frac{9+\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$, qui vterque valor *primo* minor eſt.

XVII. Conuenit autem cum hac maxima ad ſurſum trahendum difficultate vis minima ſuſtentans S, cuius hunc valorem deprehendimus §. 9. $S=\frac{amx-an\sqrt{(mm-xx)}}{mm}$ Haec enim formula differentiata, et reducta dat $\pm x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$: vbi notandum eſt, adhibito ſigno *poſitiuo*, quaeſtionem de pondere S motam ſtatim tranſire in quaeſtionem alteram de pondere T ex eodem latere poſitam, adeoque non minimum aliquod, ſed maximum inueniri, vti patet ex comparatione operationum pro paragrapho ſuperiori, et praeſenti. Adhibito autem ſigno *negatiuo*, primo quidem planum AB mutari in planum LAK, *Fig. IV.* poſita ſcil. $CK=-x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, atque tum demum pondus S tranſire in alterum latus, et conuerti ibidem in pondus T2. id quod vel ſine calculo ex ipſa quaeſtionis natura poterat erui. Dum enim $x=\frac{mn}{\sqrt{(mm+nn)}}$, euaneſcit S; et ſi x fiat adhuc minus, fiet S negatiuum, hoc eſt conuertetur S in R ſuper plano AB, donec etiam $x=0$, quo caſu R aequatur toti ponderis frictioni horizontali; quod ſi autem porro x fiat negatiuum, ſumendum infra AC, tum pondus R reuera tranſit in pondus T ſphi antecedentis, ſed ex latere prioris oppoſito pendulum.

XVIII.

XVIII. Deſtinaui hunc computum cautelae practicae, vt ſcilicet in ponderibus ope plani inclinati eleuandis caueatur angulus, cuius ſinus rectus $x = mm : \surd(mm + nn)$; ſi ſub arbitrio Artificis Mechanici ſint vires trahentes, nec euitato hoc angulo maiores aliunde generentur moleſtiae. Equidem tantus prodiit pro motu radente hic angulus, vt nihil facile ab illo metuendum ſit, niſi forte iis in caſibus, quibus onera funis ope ſuper trochleam ducti ſurſum trahere potentia debet. Iis igitur commodum eſt noſſe, quod in hypotheſi Amontoniana, qua $m : n = 3 : 1$, angulus maximae difficultatis ſit 71. gr. 35. min. in Parentiana, qua $m : n = 20 : 7$, angulus fiat 70. gr. 44. min. Sin fuerit $m : n = 4 : 1$, vti poſtea memorabimus, emergat angulus 86. gr. 1. min.

XIX. Fatendum etiam, in praxi frictionum incommoda plurimum detrahere vtilitati planorum inclinatorum, cum de motu agitur radente. Quodſi enim angulus eleuationis ſit verbi gr. 10. grad. iam tum dimidium oneris trahere debet potentia eleuans in hypotheſi Amontoniana, cum ſine frictionibus nondum quinta pars requireretur. Cumque angulus eſt 50. grad. oneris eleuandi reſiſtentia iam prope aequat pondus corporis abſolutum, vt adeo, niſi aliae rationes accedant, praeſtet planum non adhibere, ſed eleuare corpus perpendiculariter, quoties maiorem 50 gradibus angulum eleuationis circumſtantiae depoſcerent.

XX. Etſi autem in maiori angulo difficultas eleuationis ipſum pondus corporis abſolutum ſuperet: In caſu tamen neceſſitatis ſolatii loco eſſe poteſt, quod hic

ipſe exceſſus nunquam ingens euadat. Si enim in formula generali qua T($=\frac{an\sqrt{(mm-xx)}+amx}{mm}$) ſubſtituatur pro x valor eius $=mm:\sqrt{(mm+nn)}$ emerget $T=a\sqrt{(mm+nn)}:m$. Adeoque in ſententia Amontonii erit ſumma difficultas $=a\sqrt{10}:3$ paulo maior pondere abſoluto, habens ſe ad pondus abſolutum a, vti ($\sqrt{10}=$) 3, 163 ad 3,000. Vnde exceſſus $=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{3}=\frac{3.163-3.000}{3}=0,054=\frac{1}{18}$ In Parentiana autem fit $T=\frac{a\sqrt{449}}{20}=\frac{a\times 21.189}{20}$. Vnde $T:a=21,189:20,000$ et exceſſus ipſius F ſuper $a=\frac{1.189}{20}=0.059=\frac{1}{16}$ prox.

XXI. Patet etiam, quo minor fuerit n reſpectu ipſius m, hoc eſt frictio ratione preſſionis, eo minorem eſſe hunc exceſſum. Et, ſi vel maxime frictionem velis magnam ſupponere, fingendo exempli gratia $n=m$, fore ſummam difficultatem ad pondus abſolutum $=\sqrt{2}:1=141:100$, vt adeo exceſſus non poſſit ad dimidium abſoluti ponderis excreſcere, niſi frictio ſit ipſa preſſione maior. Ceterum in hypotheſi $n=m$, notari poteſt, quod ſumma ad eleuandum difficultas §. 16. cadat in ipſum angulum quietis §. 10. vbi aequilibrium eſt inter frictionem corporis, et eius niſum deorſum. Accidit vero vtrumque, cum angulus eleuationis eſt ſemirectus.

XXII. Quicquid hactenus dixi, pertinet ad motum radentem, et ſupponit, potentias, quae ſurſum aut deorſum trahunt pondera planis impoſita, agere in directione plano parallela. Ad ceteros directionum caſus extendere dicta non lubet, quoniam id nemini non facile eſt. De motu voluente nihil certum licuit definire

finire hactenus, inſtrumenti accuratioris defectu; quemad modum et de radente per eandem cauſſam determinare omnia, vti deſtinaueram, nondum valeo.

XXIII. Vnum hoc licet de meis aſſerere tentaminibus: Cum ſuper plano buxino, aut quercino, corpora examinarem varia; priſmata eiusdem ſpeciei lignea, quorum nec aſpera baſis erat, nec polita, ſed ſic ſatis glabra; eiusdemque generis orbes metallicos; cylindros item eburneos ſecundum longitudinem poſitos: eundem fere angulum quietis prodiiſſe, non obſtante baſium et ponderum differentia; nec mutatum, cum oleo corpora et plana inungerem, atque iterum probe abſtergerem. Vnum me male habuit, quod omnes hi anguli inter 12. et 15. gradus caderent: adeoque frictio eſſet ad preſſionem, vti 1 : 4, ſecus atque viſum eſt Anteceſſoribus noſtris.

XXIV. Nolim vero praecipitare ſententiam, donec omne examen abſoluero. Illi ſequentem deſtinaui tabulam, quam ad hypotheſes alias accommodare facillimum eſt. Hic Amontonium ſecutus facio $m:n=3:1$, eſtque R §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, cum ſinus rectus aufertur a coſinu ducto in rationem $n:m$, S §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, vbi coſinus ductus in rationem $n:m$, ſubducitur a ſinu recto anguli: et T aequalis ſummae ſinus recti, et coſinus ducti in rationem $n:m$, vt adeo facile ſit, aut continuare tabulam, aut ad alias aptare frictionum hypotheſes. *Fig. III.*

Tabula pro hypotheſi frictionis Amontoniana, poſito pondere abſoluto 10000 partium.

Ang. Eleuat. gr.	min.	Potentia R §. 9.	Potentia S §. 9.	Potentia T. §. 15.
0	0	0.3333		0.3333
5		0.2449		0.4191
10		0.1546		0.5018
15		0.0631		0.5807
18	27	0	0	0.6325
20			0.0287	0.6551
25			0.1217	0.7246
30			0.2113	0.7886
35			0.3005	0.8465
40			0.3874	0.8980
45			0.4714	0.9427
46	45		0.4999	0.9568
50			0.5517	0.9802
55			0.6279	1.0102
60			0.6993	1.0326
65			0.7654	1.0471
70			0.8256	1.0535
71	35		0.8435	1.0539
75			0.8796	1.0519
80			0.9269	1.0426
85			0.9771	1.0251
90			1.0000	1.0000

Ob-

Obſeruatio Anatomica
De Receptaculis Caſtorei.

1. Quum in diſſectione Caſtoris foeminae, folliculi Caſtoreum continentes viſui oblati eſſent, optabam, vt non ſolum, quae a Viris doctiſſ. circa ſtructuram patefacta ſunt, ſed quoque (ſi fieri poſſet) eorum, quae adhuc deſiderantur notitiam, qua naturae in iſtius ſucci nobiliſſimi confectione conſilium perſpicuum fieret, acquirerem. Quamquam omnia, quae ad hanc rem ſpectant, (quod ſane prima vice et vnica diſſectione difficillimum eſt) haud aſſecutus ſim, obſeruationis tamen, quam hic affero, eam vim vſumque fore puto, vt ſenſuum imbecillitati opem lucemque ferre valeat.

2. Geminae capſulae verum caſtoreum includentes, ſeparata pelle faſciaque muſculari eas inueſtiente, (iuxta duas alias ſubiectas materiam ſeu ſuccum diuerſum continentes) in conſpectum veniunt. Earum longitudo 3. poll. latitudo 1½ poll. aequabant. Ad tactum durae et ponderoſae, in ſuperficie plicis oblongis, quarum ſex numeraui, ornatae. Coloris albido-flaueſcentis. Primum inuolucrum muſculare viſum eſt. 2dum Nerueum argenti inſtar reſplendens, villoſum, nec non ſquamulis tenuiſſimis conſtans, quarum ſingulae papillam ſubiectam, corpori reticulato fuſco nigricanti inſidentem, continent 3um Vaſculoſum, ac inſtar piae menyngis, plicis ſeſe inſinuans. Duo oſtia hiſce capſulis reſpondentia, (praeter 5. alia), intra communem cloacam, pollicem lata et rugoſa, conſpicua ſunt.

3. Poſt haec, contenta capſularum inſpicienti, ecce cavita-

vitatem, reſinoſo ſucco flaueſcente, admodum fragrante, cui nomen *Caſtorei* eſt, haud turgidam, ſed, prout cauitas ſtomachi, ſolummodo inunctam ac profunde imbutam; gyros quoque ſeu plicas, quae eodem ſucco infectae erant. Ingenti vero (intuitu huius ſucci), admiratione me perculſum fuiſſe fateor, in eo inuiſcata corticum ramenta aliaque inueniens, qualia in ventriculo inteſtinisque paulo ante collecta obſeruaueram. Si, prout initio ſuſpicabar, ſub finem vitae, impetu morbi, aut caſu quocunque, eo compulſa fuiſſent, aliae impuritates, vel ſigna praeternatura ia ſimul obſeruata fuiſſent: Aliique (ante me) iam pridem inueniſſent, eiusque mentionem feciſſent.

4. Antequam ad coniecturam tranſeam, nonnulla de Caſtore prius memoranda ſunt, quae eam haud improbabilem eſſe, teſtari videntur. Primo, qui ventriculum diſſecuerunt, nihil intus inuenerunt praeter ſegmenta ex corticibus et radicibus arborum. 2. Ventriculi ſuperficies inſtar panni ſericei tonſi viſa eſt, ſuccus vero *Caſtorei* odore praeditus. 3. Caſtorem, aiunt, ad acuendum et excitandum appetitum languentem, folliculo pede expreſſo, caſtoreum ore lambere et deglutire; Indosque laqueos, quibus vtuntur ad caſtores capiendos eo oblinire.

5. Quamobrem, quia Caſtoris alimentum exſuccum, et concoctu difficillimum eſt, 2. quia ſtructura ventriculi et receptaculorum Caſtorei, item ſuccorum odores conueniunt; 3. quia praefatus ſuccus ventriculo horum animalium adeo amicus eſt, vt eum ſaepe deglutiant; Quaeri poteſt, num ex noua, quam attuli, obſeruatione opinari liceat, haecce receptacula forte data eſſe, vt paruorum ventriculorum inſtar, quaedam ramenta alimentorum, in inteſtinis reſidua, Caſtorei ope, diſſoluant ac incidant, poſteaque, immediate ſanguineis vaſis ſuper ea ambulantibus infundant.

* * *

Monſtra duo, Caſani et Petropoli in lucem edita, hoc anno examini ſubiecta fuere, quorum deſcriptiones in ſeqq. annum reſeruare neceſſe fuit.

CLASSIS
TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA

DE CIMMERIIS

Auctore

T. S. Bayero

Regiomontano.

DIxi Cimmerios ante Scytharum irruptionem inter Boryſthenem et Tanaim coluiſſe, pulſos deinde, eas regiones reliquiſſe victoribus. (1) Quae gens Cimmerii, vnde orta, quas terras petierit poſtea, exquirendum nunc duco. Nihil eſt magis vero conſentaneum, quam quod Bochartus, *M. Febr.* 1727.

 ma-

(1) In Actis ſuperioris anni p. 407. linea 8. ſcriptum fuiſſe CCCXLVII. et linea 19. fuiſſe ſcriptum 8. *Gradus cum pelibus* o. per ſe quisque facile animaduertet; monendum tamen duxi.

magno vir ingenio, et multiplici doctrina, nos docuit e Geneſi, Cimmerios eſſe diuini ſcriptoris Gomeritas, a Gomero Iapeti filio, profectos ex Armenia ſeptemtrionem verſus, donec campos illos ad vtramque Tanais ripam peruagati a longo errore conquieuerunt. Eorum cognati fuere Iones a Iauane, et Thraces a Tira, qui ante eos profecti, vrgentibus Gomeritis a tergo, Graeciam et regiones ad Iſtrum occuparunt. Id accidit ante Ioſephi Patriarchae tempora. Nam, ſi Geneſin recte inſpicias, tum illa tibi non vnius Moſis commentarios, ſed ante eum, patriarcharum omnium diaria continere videbitur, quae Ioſephus denique in vnum corpus collegit, Moſes autem in pentateuchum recepit. Non id nunc ago, vt hanc meam opinionem de ſanctiſſimo libro operoſe explicem aut ſtabiliam, dicam tantummodo quod ſentio, a Ioſepho patriarcha, non modo extrema illa de vita ſua, verum etiam totum caput vndecimum de coloniis priſcis et quaſi noui orbis geographia inſerta videri, vt tum res erat notiſſima in Aegypto et populo Iſraelitico. Iisdem in locis Homerus ſua aetate Cimmerios degere acceperat. Ita enim cecinit:(2)

Ενθα δὲ Κιμμερίων ἀνδρῶν δῆμος τε πόλις τε
Ηέρι καὶ νεφέλῃ κεκαλυμμένοι, οὐδὲ ποτ᾽ αὐτοὺς
Ηέλιος Φαέθων ἐπιδέρκεται ἀκτίνεσσι,
Αλλ᾽ ἐπὶ νὺξ ὀλοὴ τέταται δειλοῖσι βροτοῖσι.

Iſthic Cimmeriorum gens eſt et vrbs Cimmerium
Nebula nubeque obducta : neque enim eos

Sol

(2) Odyſſ. Λ. v. 15.

Sol omnia colluſtrans, radiis ſuis reſpicit,
Vtpote cum miſerabilis miſerabilibus populis incubat nox.

Orta eſt fabula ex vocabuli interpretatione. E Gomeritis Ionici populi Κιμμερίȣς fecere, inde poſteritas credidit, Χειμερίȣς dictos fuiſſe ab *hyeme et tempeſtatibus.* Et ſic quoque in quibusdam Homeri exemplaribus ſcriptum fuiſſe minora ſcholia teſtantur, pro quo Κερβερίȣς repoſuit Crates Malleota. Ad vim illius vocis acceſſit aliqua eorum narratio, qui in Ponto nauigauerant. Nam quod Thomas Hyde in itineribus mundi animaduertit, (3) quodque ab oculatis accepi teſtibus, totum Pontum regionesque littorum illorum denſa et tenebroſa nebula infeſtat. Idcirco, Pontus Turcis قره دكز *Karah Dekſi* et hodie Graecis Μαυροθάλασσα, vt nobis *Mare nigrum* vocatur. Id e vetuſtis clariſſime confirmat Hippocrates in libro de *aere, aquis et locis*: (*) aerem enim in Scythia plerumque totos dies nubilum eſſe ſcribit, ſed in immenſum quoque exaggerat, tamquam vix paucis diebus aeſtas ſit, ceterum hiems in his regionibus deſaeuiat, et quae ſunt ex eo genere alia apud Hippocratem. Ob rem tam paruam, tot de Cimmeriis tenebris ἐπιφυλλίδες ϗ ϛωμύλματα e fertili poetarum ingenio propullularunt. Scriptores argonautici his fabulis ſcenam inſtruxerunt. Iidem Cimmerios ſuper Ponto ad Tanaim protendunt, vt tum fuere ſiti, cum heroes

(3) p. 57. (*) c. 45.

illi Colchida peterent: Dionyſius Periegetes autem Φλυαρίζει, cum iisdem in tractibus Cimmerios ſua aetate reponit, deceptus fortaſſis a nomine Cimmerii vrbis, quae a veteribus incolis appellationem ad id tempus retinuit. Maeotin, inquit, *Scythae vocant matrem Ponti.*

Ἐκ τῆς γὰρ Πόντοιο τὸ μυρίον ἕλκεται ὕδωρ
Ὀρθὸν Κιμμερίου διὰ Βοσπόρου. ᾧ πάρα πολλοὶ
Κιμμέριοι ναίουσιν, ὑπὸ ψυχρῷ ποδὶ Ταύρου.

Nam ex Ponto multam aquam trahit per medium Boſporum Cimmerium, iuxta quem ſub algidi radicibus Tauri Cimmerii frequentes colunt. Ad quem locum Euſtathius plane ſui ſimilis eſt, cum ait Κιμμέριοι, τὸ Σκυθικὸν ἔθνος. Cum poſtea has Cimmerias tenebras ad Pontum, ita vt Homerus in maius extulerat fingendi licentia, non ſentirent Graeci, pro ſua in poetam religione, ne fefelliſſe videretur, altius ſub ſeptemtrione quaerebant Cimmerios et tenebras illas horribiles, vt Onomacritus in Argonauticis, parum ſibi conſtans, (**) de Cimmeriis ait:

οἵ ῥά τε μοῦνοι
Αἴγλης ἄμμοροί εἰσι πυριβρόμου ἠελίοιο
Ἐν μὲν γὰρ Ῥίπαιον ὄρος καὶ Κάλπιος αὐχὴν
Ἀντολίας εἴργουσι,

et quae apud eum plura ſunt in eam ſententiam. Quare Pytheas Maſſaliota, vt eſt apud Coſmam Indicopleuſten in topographia chriſtiana, gloriatus eſt, barbaros oſtendiſſe ſibi παραγενομένῳ ἐν τοῖς βορειοτάτοις τόποις,

(**) v. 1118.

τὴν

τὴν ἡλίȣ κοίτην, ὡς ἐκεῖ τῶν νυκτῶν ἀεὶ γενομένων παρ' ἀυτοῖς. Quamquam, ſi ea, quae Cleomedes in meteorologicis ex Pythea habet, inſpicias, non ille perpetuas ſine ſole noctes in Thule et ſeptemtrione prodidit, ſed hanc viciſſitudinem diei noctisque, quae pro anni tempeſtatibus obtingere extremis ſub polo regionibus ſolet. Alii Cimmerios ad tartarum et Plutonios campos relegarunt, ſimul cum Acheronte fluuio, qui haud procul ab Heraclea in Pontum incidit, alio nomine Σωναύτης. Sed quoniam Αχερȣσίαν quoque prope Cumas ad mare Tyrrhenum habebant Itali et Auernum lacum inferis deuotum, idcirco, vt ait Strabo, (4) καὶ τȣ̃το χωρίον Πλȣτώνιόν τι ὑπελάμβανον καὶ τȣ̀ς Κιμμερίȣς ἐνταῦθα λέγεσθαι *etiam hunc agrum tamquam Plutonium et populos circum ea loca Cimmerios commenti ſunt.* Haec ſunt illi σκοτεινῷ Lycophroni (5) Κιμμέρων ἔπαυλα. Sic Cimmerii ſunt veluti aliqua Luciani Hecate, πολύμορφόν τι θέαμα καὶ ἄλλωτε ἀλλοῖον τι φανταζόμενον.

Itaque nos Herodoto tantum auſcultabimus. Is tradit, Cimmerios olim intra Boryſthenem et Tanaitidas regiones degiſſe pulſosque a Scythis conceſſiſſe in Aſiam. (6) Iſthic excurſionem feciſſe, et Ionicas vrbes infeſtasſe: nec cepiſſe eas, aut euertiſſe, ſed in agris earum praedas egiſſe. (7) Tum Sardes aggreſſi, Ardye regnante, vrbem praeter arcem expugnarunt. (8) Tandem Cherſone-

(4) f. 266. (5) v. 695. (6) l. IV. c. 12. (7) l. 1. c p. 6. (8) l. I. c. 15.

ſoneſum Sinopicam condidere, vbi quietam ſedem tenerent. (9) Halyattes eos tota Aſia expulit. (10) Et Scythae quidem eos a Tanai refugientes perſecuti ſunt, ſed cum Cimmerii porta Caucaſea fugiſſent in Aſiam, Scythae alio itinere per Caſpias portas ſe effuderunt in Mediam. (1) Cum autem Cimmerii tam late coluerunt, vt poſtea Scythae, non eſt veroſimile, omnem gentem metu Scytharum ſe in Aſiam praecipitaſſe. Velim autem animaduertas, quod, cum fama eſſet, Scythas a Volga aduentare, Cimmerii concilium gentis ad Tiram fluvium habuerint. Eo in conuentu, aliis fugae auctoribus, reges manendum bellumque pro aris et focis conferendum cenſuerunt. Ex ea diſſenſione tumultus ortus captisque armis, (nam reges et regiae domus, pares numero reliquae turbae erant) praelium commiſſum, in quo reges omnes caeſi ſepultique ſunt a popularibus eodem omnes tumulo ad Tyram fluuium. Is tumulus ad Herodoti vsque aetatem exſtabat et celebrabatur. (2) Scythae enim, cum vacuam regionem occupaſſent, religioni ſibi duxerunt, fortium virorum monumenta violare. Manſerunt quoque Cimmerii muri, incertum tamen quibus in tractibus, et Cimmerium vrbs cum regione Cimmeria et Boſporus Cimmerius priſcum nomen retinuerunt. (3) Tiras fluuius, ad quem populi concilium celebratum eſt, longius diſtat a Tanai, vt plane ſit a fide alienum, Cimmerios ab eo fluuio in medium in-

cen-

(9) l. IV. c. 12. (10) l. I. c. 15. (1) l. IV. c. 12.
(2) l. IV. c. 11. (3) ib. c. 12.

cendium ſe praecipitaſſe et obuiam occurriſſe perduellibus, dum Tanain et infeſtum Scythicis, quae perhorreſcebant, armis orientem petunt, qui occidentem et auerſas a diſcrimine tanto prouincias ſibi vi patefacere poterant. Itaque mihi Herodoti verba omnia perpendenti vel maxime probabile videtur, Cimmerios, qui ad Tiram confluxerant, occidentem et ſeptemtrionem petiiſſe, alios e locis Tanai vicinioribus, ſalutem quaeſiuiſſe in Caucaſeis ſaltibus et Aſia.

Ita iam nonnulli ante nos ſenſere apud Plutarchum in Mario. (4) Cimbrine igitur a Cimmeriis ſunt orti? Nempe, ſi audimus turbam magnam eruditorum, res manifeſta eſt. Ego neque excedere quaſi finibus meis atque Cimmerios perſequi cupio, neque admodum curae cordique habeo, quibus ab ſtirpibus Cimbri ſint prognati. Tamen, quoniam haec quaeſtio in ſeptemtrione maxime agitata, infinitos paene errores excluſit, quibus Scythicarum gentium regionumque harum, quarum hiſtoriam tractandam ſuſcepi, veteres res propemodum ſunt oppreſſae, ipſa me neceſſitas manu ducit in hanc diſputationem, a qua abſtinere aequiore iure maluiſſem. Hugo Grotius, qui ad illarum opinionum, quae poſtea a Stirnhielmo, Verelio, Rudbequio ſunt eductae, ſementim, ſua quaedam ſemina contulit, non potuit a ſe impetrare, vt cum Cimmeriis confunderet Cimbros. Quae autem ratio induxit, non hos dicam inſigni doctrina viros, ſed veteres quoſdam omni genere laudis illis longe inferiores,

(4) f. 411.

vt Cimbros repeterent a Cimmeriis? Nulla profecto alia, quam vocabulorum ad ſonum congruentia. Hic vero Grotius, vt erat admirabili iudicio, praeuidit animo, quantum perturbationis in omnem veterem hiſtoriam inuehi poſſit, ſi incautius paullo nos in hoc negotio geramus, et ſenſerat hoc ex maiorum in illa via aberrationibus. Sapienter ille in prolegomenis ad hiſtoriam Gothicam monuit, poſſe populos toto genere et caelo diuiſos idem nomen gerere. Ne Vandalos quidem, qui ab omni aeuo a ſcriptoribus memorantur, ex eodem ſanguine illius populi, qui in Africa rerum potitus eſt, repeti patitur. Sic, quis Nomadas, (quaſi Germanus Vandalos dicat) illico putet Scythas eſſe, cum in Africa quoque populus id nominis a moribus ſuis geſſit? Boruſci a Ptolemaeo non longe a Volga ſeu Ruſſa veteri collocantur, a quibus qui Boruſſos ſeu Pruſſos antiquos ducunt, nae illi vehementer falluntur. Et vt in hoc exemplo oſtendam, quam facile ſit in eo genere falli, cum in nominis conuenientia cardo et vis omnis coniecturae illius vertitur, fugit tamen bonos viros, Prutenos primum a Vilelmo Gnapheo, et Georgio Sabino et Lotichio et ceteris illius aetatis poetis nomen Boruſſorum accepiſſe, accommodatius, vt illi quidem iudicabant, ori Romano et carmini. Omnis autem antiquitas medii aeui *Prutenos*, *Pruzos*, *Prucios*, *Brutios* aut in eum modum vocauit. Teſtimonia producere poſſem, quae multas paginas impleant, ſi eo ingenio eſſem, vt in his me oſtentarem. Qui mihi e contrario ante Gnapheum

aut

aut Sabinum et ante hos inquam ducentos annos aliquem producat auctorem, cui Boruſſi dicantur, illum ego vero lubens remunerabor: nec verius eſt quidquam, quam quod Matthaeus Praetorius vidit, vnde Pruteni ſe vocauerint populari lingua, quae ſententia antiquis hiſtoriarum monumentis confirmatur. Sed hoc non ago: illud tantum in exemplo docere volui, quam infirmum omne illud de nominum congruentia argumentum ſit. At cum Dido aliquis Aquitanicarum rerum ſcriptor (5) Danos a Danais, cum alii a Dacis et Dahis deriuant, cum Eluardus Suecos a Sueuis, cum alii Saxones a Sacis, hoc eſt, ſi diis placet, a Scythis deriuant, ea mehercle vigilantium ſomnia ſunt, ne quid dicam grauius. Talibus delectati ſunt ſcriptores ſeptemtrionales et Auentinus et ille non indoctus, vt tunc erat, fabularum parens Annius Viterbienſis. Satis erat aliqua nominum alluſio, vt nouas conderent hiſtorias, vtque probarent plebi eruditorum. Quid autem tantum eſt in Cimmeriorum et Cimbrorum nomine, vt eorum nos ſtirpem populorum miſcere oporteat? Cimmerios a Gomeritis dictos fuiſſe, admodum probabile eſt, aut plane paratus ſum deierare, vnde dicti ſint, non liquere. At Romani Plutarcho et S. Pompeio Feſto auctoribus, Cimbrorum nomen Celticum eſſe et *latronem* ſignificare compererunt. Id vocabuli adhuc habent linguae Celticae. Islandicam dico, Noruegicam, Suedicam, Danicam, Germanicam. In monoſyllabis Islandicis Ionae Rugmanni *kamp* eſt *lucta, pa-*

 laeſtra

(5) apud Saxonem Grammaticum f. 5.

laeſtra, plane vt apud nos Germanos. Snorro Sturlaeus parte ſecunda Eddae heroas dicit, vel *Kappar*, vel *Kiempur* vel *Garpar* fuiſſe, quod Reſenius Danice protulit *Herrers*, *Kiempers*, *Ficteris*. In Celticis Leibnitii: *Campau*, *ludi*, *quales Olympiaci.*

Iuuat me nunc, quoniam in hanc concertationem incidi, ipſam originem τῆς πολυτρόπου καὶ πολυειδοῦς φαντασίας paullo altius repetere, quoniam antiqua ſatis eſt. Cimbri, vt habet in Mario Plutarchus, cum Italiam inuaderent, obſcurum Romanis nomen erant, praeterquam quod proceritate corporum et caeſiis oculis Germanicam referrent ſtirpem. Serius eſt cognitum, Teutonico vocabulo latrones, ſeu potius bellatores dici atque a ſeptemtrionali oceano profectos, traiecto Rheno, Belgicae ſe infudiſſe annisque aliquot incubuiſſe Galliae ceruicibus. Ex quo factum eſt, vt Salluſtius *Gallos* diceret, aduerſus quos a L. Caepione et M. Manlio Coss male pugnatum fuit et Cicero de prouinciis conſularibus *bellum Gallicum*, quod a C. Mario confectum eſt, Cimbris Teutonisque caeſis. Ab Rheno mouerunt in Noricum et ad fines Illyricos profecti, in Carnis ad Noreiam vrbem Carbonem cum exercitu fuderunt atque per Heluetios Allobrogasque petiere Galliam, donec Hiſpaniam attingerent, vnde per Celtiberos repulſi coniunctique cum Teutonis, tanto maiori clade adfecerunt Galliam omnem praeter Belgicam et M. Iunium Silanum Cos oppreſſerunt. Hinc ille turbo aliquanto poſt interuallo Italiam inuaſit. A Mario fuſi fugatique Cimbri, traiecto Rheno, iuxta Belgas conſederunt. Antiqua autem

Cim-

Cimbrorum ſedes ſub ſeptemtrione auſpiciis Caeſaris Auguſti et Tiberii Caeſaris eſt cognita et paene armis petita. Res hae tam planiſſimae nactae ſunt inanes hariolatores, Graecos homines, qui tumultum, quam Cimbri, conciuere maiorem. Alii apud Plutarchum Cimmerios ferunt a Scythis pulſos partem in Aſiam, Lygdamo quodam duce, (quem Herodotus ignorat, Strabo et Plutarchus (6) nominant) effuſos, partem aliam et maximam bellicoſiſſimamque occidentem verſus fugiſſe. Recte illud adhuc, quantum iudico, niſi quod denſas et profundas ſyluas vltra Hercyniam incolentibus, contractiores dies productioresque noctes, Homero de Cimmeriis tenebris fabulam fabricandi occaſionem praebuiſſe adiiciunt. Ex eo enim conficitur, non animaduertiſſe eos, Homeri Cimmerios nondum tum a Scythis fuſos fugatosque, ad Ponti littora, non autem ſub hoc ſeptemtrione egiſſe. Alii apud Plutarchum, regionibus omnibus ab oceano occidentali ſeptemtrionalique ad Maeotin vsque in arctum contractis, Gallos Scythas in omni illo tractu poſuere, quorum pars eſſent Cimmerii ſeu Cimbri. Ταῦτα μὲν, inquit Chaeronenſis, homo non obeſae naris, εἰκασμῷ μᾶλλον, ἢ κατὰ βέβαιον ἱςορίαν λέγεται. Adeo ille haec ſuſpecta habet. Sed quantum in his Poſidonius ad hariolandum ſibi permiſit! Cimbros ait homines fuiſſe praedones et in primis vagos (7) (id enim erat neceſſe, vt impetraret, quae vellet, Poſidonius

(6) Strabo f. 57. Plutarchus in Mario f. 411. (7) Strabo f. 333.

nius) armisque ad Maeotin progreſſos nomen dediſſe Cimmerio Boſporo, quaſi Cimbrico: Boios Hercyniam ſyluam incolentes, cum Cimbri ad ſe quoque in armis venirent a Maeotide, ſi diis placet, regreſſi, manus conſeruiſſe Cimbrosque illata clade ad Tauriſcos Gallos et Heluetios compuliſſe, vnde in Italiam impreſſionem fecerint. Hanc non improbabilem coniecturam vocat Strabo, cum in ea abſurda ſunt omnia, gentes resque et ſecula inter ſe confuſa. Cimbros dicit ab ſeptemtrionali oceano ad Maeotin paludem profectos nomen dediſſe Cimmerio Boſporo. Cimbri ante Cn. Papirium Carbonem Cos et A. V. C. ↀcxxxx. profecti ſunt ab Rheno: Cimmerium autem vrbs iam annis centum et amplius ante vrbem conditam Homero nota fuit. At de illa ſuperioris aeui migratione Cimbrica, qua Cimmerii ſunt ad Pontum et Boſporum tamquam ver ſacrum in coloniam miſſi, niſi fallor, loqueris ὦ δαιμόνιε;

Quo teneam vultus mutantem Protea nodo?

Quem vero auctorem habes Poſidoni? Nempe aegram ſine ſomno noctem. Scythas pepulere Cimbri, vt viſum eſt Poſidonio. Male ſit illi Halicarnaſſenſi, qui Cimmerios a Scythis exterminatos tradidit. Nimirum ſeduxit Poſidonium grammaticus. Exſtat indicium eius rei in minoribus Homeri ſcholiis, vbi aliquis veterum (8) ὑπὸ Κιμμερίων Σκύθας ἐξελαθῆναι *a Cimmeriis Scythas eſſe pulſos* afferit et tamen Herodotum citat teſtem.

En

(8) ad Od. Λ. v. 15.

En cor Zenodoti! en iecur Cratetis!
Romani nouerant Cimbros a ſeptemtrione profectos Rhenum traieciſſe patrem amnium: Poſidonius iocum putat Romanam fidem et ab oriente Cimmerios ducit aduerſus Boios ad Hercyniam ſyluam, inde male mulctatos in Italiam. *Vndique totis vsque adeo turbatur agris.* Dicam ſicuti ſentio de Poſidonio, philoſopho quidem non indocto, ſed in his noſtris infante Quoniam philoſophi haud longe abſunt a deum conditione, vt mundos, quoties volunt, condant nouos, eo credidit Poſidonius idem ſibi licere in rerum geſtarum hiſtoria. Nec immerito vero, cum Cimbros cognouiſſet aliquando profectos a ſeptemtrione, Cimmerios autem, vel Homero teſte et Herodoto, incoluiſſe Ponti littora. Hoc ſatis erat ad exordiendam longam fabulam. Nihil tamen hoc eſt adhuc prae eo, quod dicam. Cimmerii in iisdem regionibus coluere, in quibus poſtea Scythae, vt quidem Herodotus auctor eſt: Cimbri autem, vt Strabo, Tacitus, Plinius, Ptolemaeus, praetendebantur Suetiae: ergo Suetia eſt illa vetus Scythia. Ridiculum eſt, quod dico, tamen nonnulli in illum modum aciem ingenii ſubtiliſſimi exeruerunt, cum critices huius, quae ad hiſtoriarum veritatem exquirendam, neceſſaria eſt, plane ignari eſſent. Nec caruere vitio hoc Graeci quidam vetuſtiores, vt exemplo eſſe poteſt ὁ θαυμάσιος Poſidonius. Audiamus tantummodo Geographum Rauennatem: (9) *inter oceanum, procul, magna inſula, antiqua Scy-*

(9) p. 26. ed. Porcheronis,

Scythia reperitur, *quam inſulam plerique philoſophi hiſtoriographi conlaudant*, *quam et Iordanes* (Iornandem putat,) *ſapientiſſimus coſmographus Scanzam appellat, ex qua inſula pariterque gentes occidentales egreſſae ſunt : nam Gothos et Danos*, *immo ſimul Gepidas ex ea antiquitus exiſſe legimus.* Qui, malum, Gothi e Scandinauia? Nempe Ablauius aliquis philoſophus cognouerat, proxime Scythas atque paene inter eos quoque, coluiſſe Getas, e Scandinauia autem iam ante eum alii Scythiam fecerant, ergo tempus erat, vt inde Gothos fauſtis auibus immitteret Ponticis regionibus atque inde florentibus prouinciis. Adeo haec pars hiſtoriae vario et ancipiti tumultu eſt plenior,

Quam magno vento plenum eſt vndarum mare.

Ita Suetia facta eſt *officina gentium*, *aut certe velut vagina nationum*, vt Iornandis verbis vtamur. (10) Et Iornandes quidem hanc Getarum a Scandinauis et Cimbris originem, *Getarum carminibus priſcis paene hiſtorico ritu in commune fuiſſe recoli ſolitam*, ſcribit, et ego pro mea ſimplicitate his carminibus haud parum fidei detulerim, ſi exſtarent : nunc mihi Epicharmus cantilenam illam ſuam inſuſurrat, νᾶφε ϗ μέμνασο ἀπιϛεῖν. Cum enim Iornandes ab his carminibus non ſeiunxit ſua illa e Graecis et Latinis, non ſatis conſtat, quantum ex obſcuris Getarum carminibus acceperit, periculum eſt autem, ne pro vetuſtis populi illius monumentis, Iornandis figmenta amplectamur, *nubem pro Iunone.* Multa ille a patre et auo ceterisque gentis ſuae

(10) f. 193. 194. Muratorii

ſuae hominibus ante ſe geſta accepit, in quibus minime eſt reprehendendus. At vbi explere veterem memoriam e vetuſtis libris, quos *triduana lectione* euoluerat *et nonnulla ex hiſtoriis Graecis atque Latinis conuenientia* addere conatus eſt, in his illi praepropera haec male ceſſerunt, vt ei fides ſeu nulla, ſeu admodum circumſpecte adhibenda ſit. Quod autem caput rei eſt, vſum eum eſſe Strabone reperio, e quo Poſidonii illa inſomnia hauſit. Igitur e Poſidonii coniectura tenui ſcaturigine manauit opinio, quae latiori alueo a Iornandis credulitate profluxit, donec a Stirnhielmo, Verelio, Rudbequio aggeribus perfoſſis omnibus, orbem prope vniuerſum inundauit. Quot enim gentes eorum opinione ex Suetia non ſunt egreſſae? Viri illi fuerunt ſummo ingenio et exquiſita admirabilique doctrina, ſed in quibus aut patriae amor incredibilis veritatem obfuſcauit, aut qui vix quidquam de his ex animi ſententia dixerunt. De Iornandis erroribus alio tempore accuratius diſputabimus. Virum bonum dico, ne quis me reprehendat, ſed mehercle, in vetuſtis temporibus non idoneum auctorem. Paruo nauigio euectum fluctus obruerunt in littore.

NVMI DECEM
ERYTHRAEORVM
IN IONIA
ILLVSTRATI
T. S. B.

M. Maio 1727.

QVamquam Erythrae aliae ſiue in Locride, vt Stephano Byzantio, ſiue in Aetoliae Επικτήτȣ finibus, vt Liuio viſum eſt, aliae in Cypro (Paphon puta ipſam, vetuſtiori nomine Erythras) aliae in Libya Cyrenaica ſitae fuere, tamen duae tantum vrbes exſtant et celebrantur, quibus eruditi inſcriptos Erythraeorum nomine numos acceptos ferunt. Plerosque Ionico oppido attribuunt, vnum Boeotis vindicauit Ioannes Harduinus, quem honoris cauſſa nomino. Ita enim ille in numis populorum vrbiumque illuſtratis fatus eſt: " Erythrae in Boeotia. Numus ex "argento perpulcher, formae mediocris, apud Mar"chionem de Montauban, parte antica vultum exhibens "Alexandri, tecto capite, pelle leonina, in altera pa"gina

" ΕΡΥ
" *cum auicula, claua Herculis,*
" ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ
" *pharethra cum theca.*

"Erythras in Boeotia Plinius commemorat. *Fuere* "*Boeotiae Thebae* (inquit ille ibidem) *duorum numinum* "*Li-*

Liberi atque Herculis, vt volunt, patria. Claua Her-„ culis, pharetra ſymbolum Liberi eſt. Thebis ab A-„ lexandro expugnatis, vt Plinius refert, videtur mone-„ ta ab eodem fuiſſe translata Erythras. Erythrenſis ma-„ giſtratus eſt ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. Auiculam perdicem„ eſſe, ex Plinio intelligimus, quo teſte, perdices non„ transuolant Boeotiae fines in Atticam.„

Nobis omnia aliter ſunt viſa in nouem Erythraeorum numis, quos Ioannes Chriſtianus Buxbaumius, non *Tab.* 28. modo a botanices ſcientia et excellenti laude, ſed etiam *Fig. II.* ob veterum ſtudium numorum mutuamque amicitiam mi- *vsque X.* hi iucundiſſimus, ex peregrinatione Thracica et Aſiatica ſecum tulit Coemerat Conſtantinopoli a Iudaeo quodam numos Erythraeorum argenteos, numero ad viginti tres, pretio non maiori, quam quo argentum non ſignatum venit. Ex his ſelegit nouem numos magiſtratuum nominibus diſcrepantes, ceteros diuiſit inter amicos. Summo veteris Graeciae ingenio et artificio elaboratos nulla aetatis iniuria foedauit, vt praeſertim in tertio, quarto, quinto, ſexto et nono numo perſpicuis lineamentis auis quae ſit, ſine ſuſpicandi moleſtia adpareat: nam in ceteris paullo altiores habet pedes et erectiorem ceruicem et breuius caput, quam vt fallere haec ſpecies non poſſit eos, qui vnum tantum viderint numum, non inter ſe contenderint omnes nouem. Noctua igitur eſt, non alia auis, nedum perdix, vt ipſum fundamentum, ſuper quo Harduinus inaedificauit, ſubrutum et euerſum eſſe ſcias. Nihil enim aliud induxit ingenioſiſſimum virum, vt crederet numum ſuum Boeoticae fuiſſe officinae, quam quod eum numum, in quo perdix eſſet, ita demum e

Tab. 28. *Fig.* XIII. Plinio ſibi viſus eſt illuſtrare poſſe. Appoſui decimum numum e Carolo Patino, (1) qui immane quantum a vero deflexit. Nam ex auicula in numo obtrito non perſpicue obſeruata, aliquid ſeu clauo, ſeu pedo, ſeu palmae, ſeu neſcio cui ſimile rei fecit. Ceterum Patinus quoque numum ſuum ad Alexandrum M. refert, illud autem EPY negotium inexplicabile putauit.

Iam, quae mea opinio eſt, numi omnes decem Erythris in Ionia ſignati, noctuam idcirco gerunt, quod Mineruae ſumma religio eius ciues vrbis teneret: quae vt eorum animos inuaſerit atque a quibus populis ſit ducta, haud abſurde ab ipſa ſtirpe repetemus. Agrum illum vniuerſum primi Cares tenuere, ſiue illi ex inſulis profecti, quae apud Cretenſes fama obtinuit, ſiue aborigines fuerint Lydorum Myſorumque cognati. (2) Cum inter Europae filios contentione orta, Minos per factionem ſuperior Sarpedonem fratrem et partium ſocios expuliſſet, hi quoque iſthaec littora petiere, Lyciique ſunt dicti. (3) Confecto bello Troiano Calchas Pamphylios in eundem agrum deduxit. At Erythrus Rhadamanthi (is quoque Minois frater fuit) filius, tempore non multo poſt e Creta profectus, inter Caras, Lycios, Pamphylios partem neceſſitudine, partem ſocietate Cretenſibus deuinctos conſedit, vrbique ab ſe nomen impoſuit Erythris. Cleopus aut potius Cnopus Codri filius, collecta ex Ionicis vrbibus manu, inter veteres Erythraeos ſedem cepit. Ita videlicet Erythraeorum teſtimonio Pauſanias. (4)

Ery-

(1) In nummis Imperatorum f. 9. (2) Herodotus l. 1. c. 171. ſequ. (3) ib. c. 173. (4) f. 528. 529.

Erythrus vrbem a ſe inſtitutam ſub Mineruae tutela eſſe voluit, eaque cauſſa ΑΘΗΝΑΣ ΠΟΛΙΑΔΟΣ delubrum et ſimulacrum deae, eximia magnitudine, ſedentis in ſolio et in vtraque manu colum, capite caeli orbem geſtantis, dedicauit. Non hoc quisquam de Erythro planiſſime ita prodit, ſed probabili quadam inueſtigatione verum tenemus. Nam illud ſimulacrum Mineruae, Erythris ſumma religione cultum, Pauſania iudice, (5) Endoei opus fuit: Endoeus autem Athenienſis Daedalum magiſtrum ob caedem Cali exulem ſecutus eſt in Cretam. (6) In hoc temporis quaſi veſtigio quod veroſimillimum eſt deprehenditur. Nam Endoeus aequalis eſt Troianis temporibus, vt Daedalus Minoi et Herculi. Itaque haud difficulter conſequitur, Endoei hoc opus a Cretenſibus in Aſiam fuiſſe deportatum et ab Erythro dedicatum in noua vrbe. Sic ab ipſis Erythrarum exordiis Minerua *arcis praeſes* fuit, vt Liuiano verbo vtar, qui πολιάδα ϗ πολιοῦχον Mineruam ſic interpretatur. (7) Cum autem Minerua omnibus in vrbibus coleretur, non tamen Polias aut Poliuchos fuit, niſi ſi qua in vrbe aut arce tutelare numen erat, praecipua et ante deos deasue alios religione et deuotione ciuium conſecratum. Ita πολιάοχος Παλλὰς apud Camarinos, quam Pindarus canit, (8) ciues eleganti in numo ſignarunt, (9) ita Minerua Polias Corinthi, quae vbi de tutela

(5) f. 534. (6) Pauſanias f. 62. (7) l. XXXI. 30. et alibi, adi Phornutum de natura deorum p. 187. ed. Gal. (8) Olymp. E. v. 23. (9) apud L. Begerum Theſ. Brandeburg. T. I. f. 378.

vrbis cum Neptuno certauerat, ex Iouis iudicio hunc honorem cum eo diuiſit, vt ipſa Polias, Neptunus Rex diceretur, quare, inquit Pauſanias, (10) vetuſtus eius populi numus ἐπίσημα habet tridentem et Mineruae caput. Apud Tegeatas Poliadi ſacra faciebant ἐν Ερύματος ἱερῷ *in aede caſtelli ſeu arcis*, quod Minerua inexpugnabilem feciſſet vrbem, cum de Meduſae crinibus anguineos cincinnos Cepheo Alei filio cuſtodiendos dedit, (1) quare etiam in Tegeatarum numis Mineruae caput caelatum eſt. Eiusdem Mineruae delubrum apud Chios, Erythraeis proxima cognatione deuinctos, conſtructum fuit. (2) Quid dicam de Poliade Athenienſium? de qua non ignobile exſtat ſcolium in compotationibus cani ſolitum Athenis: (3) Παλλὰς τριτογένεια, ἄνασσα Ἀθηνᾶ, ὄρθου τήνδε πόλιν τε καὶ πολίτας ἄτερ ἀλγεών τε καὶ στάσεων καὶ θανάτων ἀώρων. *Pallas Tritogenia, Minerua regina, rege et ciuitatem hanc et ciues, ſine calamitatibus, ſine ſeditionibus, ſine intempeſtiuis funeribus.* His enim muneribus tutela Mineruae continebatur. Mirumne adeo, vrbis et arcis praeſidem tutelamque noctuae ſigno in numis Erythraeorum dedicari?

Id enim commune erat Mineruae ἐπίσημον, cuiusmodicumque habitus cultusque deae eſſet. Diſcrepabant enim in his palladia vrbium. Apud Erythraeos ſimulacrum ligneum Mineruae μεγέθει μέγα, καθήμενόν τε ἐπὶ θρόνου, καὶ ἠλακάτην ἐν ἑκατέρᾳ τῶν χειρῶν ἔχον

(10) f. 182. (1) Pauſan. f. 695. (2) Herodotus l. I. c. 160. (3) apud Athenaeum f. 694.

ἔχον, καὶ ἐπὶ τῆς κεφαλῆς πόλον, *in vtraque manu* ἠλακάτην, *capite caeli orbem geſtabat.* Vtrumque ob artes, quarum Minerua praeſes erat: eius enim erat et contemplandi caeli et tractandae lanae ſcientia. Ἠλακάτην dicit Pauſanias, qui vtique colus eſt, vt ſcholia minora Homeri explicant: (4) τὸ γυναικεῖον ἐργαλεῖον, ἐξ οὗ τὸ νῆμα ἕλκουσιν. ὡς ἐκεῖ ὁ ποιητής

Ἠλακάτη τετάνυστο ἰοδνεφὲς εἶρος ἔχουσα. (5)

Ἠλακάτη *eſt inſtrumentum, quo mulieres opus habent: ex eo enim ſtamen trahunt, vt apud Homerum*, (cum Helenae colum deſcribens ait: ſuper aurea corbe, in qua ſtamen repoſitum), *reclinata erat colus reuinctaque lana purpurea.* Etymologus Magnus e contrario ὄργανον, περὶ ὃ εἰλοῦσιν αἱ γυναῖκες τὸ νῆμα, *inſtrumentum, circa quod mulieres arcte ſtamina circumagendo voluunt.* Fuſum dicit et veriuerbium reſpicit, cum ἠλακάτη eſt ἠλακτή τις, παρὰ τὸ ἠλάσσω In veteri Epigrammate Ἐργάτιν εὐκλώστου νήματος ἠλακάταν. Formam eius expreſſam habet Plato decimo de republica: (6) ait enim ἀτράκτου ſeu fuſi Parcarum tres eſſe partes, ἠλακάτην ſeu ſcapum, ἄγκιστρον ſeu vncum, per quem ſtamen tranſit et σφόνδυλον ſeu verticulum cauum, ὥστε ἠλακάτην διαμπερὲς διὰ μέσου ἐληλάσθαι, *ita vt ſcapus per medium verticulum agitetur*, quo ſimul ἔτυμον vocis explicatur. Hac quaſi pictura inducor, vt in ſemiſſe apud Fontanam Equitem, (7) fuſi a Platone deſcripti *Tab.* 28. *Fig. I.*

(4) ad Il. π. v. 183. (5) Odyſſ. Δ. 135. (6) f. 47·. 472. ed. H. Petri. (7) Apud Montefalconem Antiquitatum explicatarum T. III. parte I. Tab. 89. 5.

ſcripti iconem mihi videre videar, et idcirco muliebre caput, Mineruae eſſe putem. Fuerunt enim priſcae matres Romanae vel maxime domiſedae et lanificii ſtudioſae, vt non puderet Quirites, dea et colo fuſoque ſignare ſemiſſes. Cum autem Minerua Erythraea vtraque manu geſtare ἠλακάτην dicitur, non vtique ſolam colum intelligi velim, ſed etiam fuſum, quoniam Ἠλακάτη vtrumque ſignificat, ita, vt Catulliano verſu habitum deae poſſis deſcribere: (8)

Laeua colum molli lana retinebat amictum:
Dextera tum leuiter deducens fila ſupinis
Formabat digitis, tum prono in pollice torquens
Libratum tereti verſabat turbine fuſum:
Atque ita decerpens aequabat ſemper opus dens,
Laneaque aridulis haerebant morſa labellis
Quae prius in leni fuerant exſtantia filo.
Ante pedes autem candentis mollia lanae
Vellera virgati cuſtodiebant calathiſci.

Ea vetuſtiſſima ratio tractandae lanae fuit: altera commodior, quam in monumento Apolloniae inter marmora Oxonienſia cernimus, (9) vbi ancillarum vna colum, altera fuſum tenet et dominae miniſtrat, quamquam paulo rudior pictura eſt, vt vix ſatis, quae ſit, cognoſci queat. Hoc autem habitu Minerua eſt efformata ab Endaeo, quod matres Cretenſes eo genere operis ſtudioſe occuparentur. Manſit ea induſtria in colonia Erythraea et Ionicis quoque mulieribus. Quocirca Theocritus Theu-

(8) epigr. LXV. 311. (9) f. 82.

Theugenidi vxori Niciae Mileſii Ηλακάτην dono dedit in idyllio, cuius hoc eſt principium:

> Γλαυκᾶς ὦ φιλέριθ' ἀλακάτα δῶρον Αθανάας
> Γυναιξὶ νόος οἰκωφελέεσσι σός ἐπήβολος.

> *O colus amica lanae, munus glaucae Mineruae,*
> *Matronis cura, quae domum ſuam locupletant.*

In eum modum Erythrae a Cretenſibus conditae, Mineruam arcis praeſidem accepere. His ego potius fidem adhibuerim, Erythraeis ipſis veterem memoriam ita recolentibus, quam Straboni,(10) qui Erythras Ionicas coloniam Boeoticarum, nullo certo auctore prodidit. In Boeotia Homeri (1) veteres critici vrbem Boeoticam βαρυτόνως Ερύθρας, Ionicam autem vrbem ὀξυτόνως Ερυθρὰς pronunciari annotarunt. At Homerus, vt nunc in exemplaribus eſt, κατὰ τὴν λήγουσαν Boeoticas enunciat. Tum quoque in eo diſputant critici, acceperintne Erythrae Boeoticae nomen ab Erythro filio Neptuni et Amphimeduſes Danai, an ab Erythra filia Porphyrionis, qui erat Seriphi. Sunt haec commenta veterum grammaticorum, quibus primordia vrbium populorumque, fabulis inſerere, eximia voluptas et ſumma gloria fuit. Nulli autem Boeotici aut Dorici generis Erythraeo in agro conſedere, ſed poſtremi ſecundum Cretenſes aduenere Iones. Quis eos Erythras deduxerit, ob diſſenſionem ſcriptorum ambigitur. Velleius Paterculus (2) principem et auctorem harum coloniarum edidit Io-

(10) f. 466. ed. H. Petri. (1) Il. B. v. 499. (2) l. 1. c. 4.

nem, eſtque illius cauſſa rei ab eruditis reprehenſus et a Iuſto Lipſio propemodum laceratus, donec Thomas Lydiatus iam vndique circumuento auxilia ſubmiſit oſtenditque ſeu ex vero, ſeu probabili coniectura, Ionem illum non vtique Xuthi ſed Codri fuiſſe filium, Nelei fratrem. Hellanicus in Atticis (3) deductam Erythras coloniam refert a Neleo Codri filio, a quo caeteras quoque Ionicas colonias conſtitutas fuiſſe multorum opinio eſt, quos omnes hoc loco teſtes producere putidum nobis videtur, cum in illius memoria aetatis nihil celebratius Heraclidarum aut Ionum profectione ſit. Iones autem ab Heraclidis ἐν καθόδῳ ex Aegialea et Iſthmo eiecti, cum in Attico agro, (ſterili praeſertim et inope) exſuperante multitudine, nouas terras quaerere cogerentur, ducem reperere Neleum Codri filium, qui regno Athenienſi per vim occupato exciderat. Nam cum Medon Nelei frater regno illo precario potitus eſſet ex Pythii ſententia, Neleus Ionas factionis ſuae ſibi aggregauit Aſiamque cum claſſe petiit. Hanc Ionum ἀποικίαν veterum quidam centum et quadraginta annorum interuallo a Troia capta definiunt, a quo tempore chronicon marmoreum non admodum abhorret, cum centum et triginta duobus annis ab excidio vrbis ΕΦΕΣΟΝ ΕΡΥΘΡΑΣ ΚΛΑΖΟΜΕΝΑΣ conditas prodit. At non vnius ducis, nec anni vnius id opus fuit. Praeter Neleum ceteri quoque Codri filii profecti ſunt diuerſis annis. In quibus Pherecydes auctor eſt, (4) Androclum fre-

(3) apud Harpocrationem p. 173. (4) apud Strabonem 730. 731. Is eſt Phercydes Syrus, qui Cyri temporibus primus hiſtoriam Graecam tractauit.

frequentaſſe Epheſum, Cydrelum nothum Myuntem, Nauclum Teum, et Caenopum, Codri item nothum, Erythras. Huc traho Stephani teſtimonium: Ἐρυθρὰ, πόλις Ἰώνων, ἐκαλεῖτο δὲ Κνωπέπολις ἀπὸ Κνώπου, *Erythra, vrbs Ionica: vocata eſt autem Cnopopolis a Cnopo.* Stephanus auctorem habet Hecataeum Mileſium, cui vt antiquo ſcriptori et rerum admodum gnaro fidem non negauerim. Quamobrem Caenopum aut Cnopum conditorem coloniae Ionicae apud Erythras fuiſſe cenſeo et Cleopum Pauſaniae ex eo nomine eſſe deprauatum. Polyaenus in ſtratagematis (5) narrat, Cnopum cum Erythras appugnaret, ex oraculi ſententia ad ſe accerſiuiſſe e Theſſalia ſacerdotem Hecates Chryſamen. Hanc herbis et carminibus taurum excantaſſe atque cornibus inauratis, corpore ſertis et purpura exornato, in conſpectu hoſtium ad aram inter duo caſtra mediam duxiſſe. Cum autem taurus oeſtro ab incantamentis percitus ſe ab ara proripuiſſet ad hoſtes, ab iis omine, vt rebantur, fauſto laetis, diis eſſe immolatum: at cum eius tauri carne in ſacris veſcerentur Erythraei, omnes in veſaniam verſos furientium more ſaltaſſe atque ita a Cnopo eſſe caeſos. Sic, inquit, Cnopus ἐκράτησε τῆς Ἐρυθραίων πόλεως, μεγάλης τε καὶ εὐδαίμονος.

Non eſt operae pretium, vt, quanta religio Mineruae aut Athenis aut in Ionibus obtinuerit, vel verbo dicam: quis enim ab antiquitatis ſtudio, vel vitae quodam inſtituto vel iudicio et ratione ſic abhorret, vt hoc neſciat?

(5) l. VIII. c. 42.

NouaErythraeorum ſacra nobis in memoriam reuocat claua nodoſa et corytus Herculis. Nam quid nobis cum Libero patre, poſtquam ea opinio labefactata eſt, qua haec Harduini de Libero coniectura fulciebatur. Quis neſcit Herculis virtutem non minus ſagittis inſignem, quam claua? Stymphalides aues et cerua Dianae et Neſſus et genu Chironis, ipſe denique Nemaeus leo teſtimonio ſunt, Herculem non degenerem Euryti (6) diſcipulum in ſagittandi arte fuiſſe. Corytus in omnibus his numis eximia pulcritudine conſpicitur, vt quatuor conſtringitur angulis, vt bullis ſeu aereis ſeu argenteis circum extrema ornatur, vt pars ſuperior clathrata eſt ad minuendum pondus, vt media eſt loris deuincta, quae retro reiecta pendent, quo leuari corytus poſſit et indui humeris, vt arcus denique inſertus eſt, prominente extremo cornu et neruo, ita vt maiori forma deſcripſimus, quoniam ea adhuc deſiderata eſt. Fere eadem forma eſt corytorum quibus Sinenſes et Tattari vtuntur e corio, quales ſunt quaedam in Imperatorio muſeo. Gloſſae veteres: γωρυτὸς θήκη δερματίνη βελῶν. Bene habet, quod corytus e corio confici dicitur, leuitatis cauſſa. Virgilius: (7)

Tab. 28. Fig. XV.

queis tela, ſagittae,
Corytique leues humeris, et lethifer arcus.

Ob eandem cauſſam Herculis pharetram Theocritus πολυῤῥαπτον (8) dixit. At corytum *ſagittarum thecam,*

(6) Heracliſcus Theocriti v. 105. (7) Aen. x. 169. (8) in Hercule Leont. v. 265.

cam, ſeu *pharetram* vetuſtiſſimi non dixerunt. Pharetra eſt ὀϊςοδόκη, ὀϊςοθήκη, *venena tis grauida ſagittis*, vt ait Flaccus: ſed γωρυτὸς eſt θήκη τȣ͂ τόξȣ *arcus tegumentum*, vt Critici minores in Odyſſeam (9) τοξοθήκη vt Heſychius Ioannes Pediaſimus in ſcholiis Heſiodeis, (10) ſollicite diſtinguit corytum et pharetram. Pharetram dicit *telorum thecam eſſe*, *in quam coniiciuntur ſagittae*, παρὰ τὸ φέρειν τὰ τρῶσαι δυνάμενα, *quaſi quae ferat ea*, *quae vulnerare poſſunt*: et corytum eſſe, *in quo reponitur arcus*, ἀπὸ τȣ͂ γῶ τὸ χωρῶ καὶ τȣ͂ ῥυτὸν τὸ ἑλκυςὸν, τὸ χωρȣ͂ν δηλαδὴ τὸ ἑλκυςὸν, ἤγȣν τὸ τόξον, *a* γῶ *et* ῥυτὸν *quorum alterum recipere ſignificat, alterum autem arcum, qui neruis attrahitur*. Sic etiam Iſidorus Hiſpalenſis. E contrario Etymologus magnus, ita vt veteres Gloſſae. P. Papinii ſcholiaſta, (1) *corytos dicitur ſagittarum theca*; *pharetra*. Et quidem hoc ad mentem Papinii, cum ſic ait: *caeleſtibus implet corytum telis*. Sin Homerum, vt aequum eſt, audimus, corytus vtique diuerſus fuit a pharetra. Nam in Odyſſea pharetram inter penetralia domus Vlyſſeae repoſitam ſic deſcribit: (2)

Φαρέτρη
Ιοδόκος, πολλοὶ δ' ἔνεσαν ςονόοντες ὀϊςόι.

pharetra tela quae continet, *multae autem in ea erant ſtridulis ſagittae pennis*. At Penelopen inducit, vt conſcendit ſcabellum et de clauo ſuſpenſum arcum detrahit

(9) Odyſſ. Φ. 115. (10) ad Scutum Herculis v. 128.
(1) Odyſſ. Θ. 53.

Ενθεν ὀρεξαμένη ἀπό πασσάλȣ ἄνυτο τόξον
Αὐτῷ γωρυτῷ, ὅς οἱ παρέκειτο φαεινός.

Arcum de clauo porrexit, ſimul cum coryto ſplendido, qui erat circumiectus. Ouidius quoque in triſtibus, (3) coryton et arcum iunxit, cum ait de Sarmatis:

In quibus eſt nemo, qui non coryton et arcum
Telaque vipereo lurida felle gerant.

Secutus tamen eſt Papinius auctoritatem Maronis, qui *corytos leues* dixit, cum et pharetram et thecam arcus in animo haberet. Ille vero σκοτεινὸς Lycophron, (4) inſolitarum et ambiguarum vocum auceps, γωρυτὸν Σκύθην, incertum, an corytum cum arcu dicat, quem Hercules a Teutaro Scytha, vt ait, acceptum dono dedit Aiaci, an pharetram. Itaque ſatis lucide adparet, apud vetuſtiores heroas corytum et pharetram diſcrepantium nomina rerum fuiſſe. Habuerunt corytos, in quibus domi arcus conderent. Illorum ſuperiori patentique parti tegumenta impoſita fuiſſe, ne puluis penetraret, neruosque corrumperet, veroſimile fit etiam ex his numis, in quibus ſuperior pars ad recipiendum tegumentum accommodata eſt. Quod autem Harduinus talem thecam coryti in numo ſe videre cenſet, hoc ſeu numi vitio, ſeu errore oculorum accidit, vt thecam crederet id, quod extremum cornu arcus eſt. Geſtarunt quoque humeris corytos, quod ex loris, quibus hi noſtri conſtringuntur et ex tota forma intelligitur. Quocirca in hoc inſigni argenteo numo Auguſti, quem (5) Paulus Pedruſius,

(3) l. V. c. 8. (4) v. 458. (5) tom. II. tab. X. 9.

ſius e Parmenſi gaza produxit corytus cum arcu, atque pharetra cum ſagittis coniuncta ſunt in vno quaſi corpore, quo commodius geſtentur. Poſteaquam breuioribus arcubus vti coeperunt (nam veteres heroes grandioribus et rigidioribus delectati ſunt) arcum inter ſagittas poſuere, ita vt pharetra etiam coryti munus nomenque ſubiret. Id adparet ex numo ſerrato, qui in gazophylacio Imperatorio adſeruatur, a L. Begero quidem e cimeliis Regis Pruſſiae iam antea editus, (6) ſed ob quandam diuerſitatem a nobis quoque producendus. C. Poblicius Q F Herculem exhibet, qui in eum fere modum, vt Theocritus cecinit, leonem Nemaeum conficit. Eſt enim corytus cum arcu et duabus ſagittis, quoniam Hercules principio ſagittis petiit leonem: eſt claua, qua irruentem beſtiam feriit: iam ſeminecem belluam conſtringit et ſuffocat, more tamen alio, quam Theocritus praeſcripſit. In plerisque numis, ne quid diſſimulem, arcus ſine corytis cernimus, ſiue in manu, ſiue humeris ſuſpenſos iuxta pharetras. Praeſertim in Dianae ſignis, quae in Poſtumiorum, Ti. Claudii Ahenobarbi, Maſſilienſis vrbis aliisque numis ſpectantur. Ad poſtremum non omnes coryti et pharetrae forma differebant. Nam quales hic in noſtris numis coryti ſunt, talis eſt pharetra in numo Antonini Commodi inſcripto: HERCVLI. ROMANO. AVG. (7) quales deinde pleraeque aliae ſunt

Tab. 28. *Fig. XIV.*

Tab. 28. *Fig. XII.*

(6) T. II. f. 573. (7) apud Bergerum T. II. f. 679. (8) ib. T. III. 45. et apud Montefalconem in Antiquit. T. I. parte II. tab. 136.

ſunt pharetrae, talis eſt corytus in numo Coenſium, (8) in quo Herculem Iouis filium conſecrant.

Quam antiquae caeremoniae religionesque in Herculem apud Erythraeos tenuerint, Pauſanias declarauit. (9) Erat ſimulacrum dei non Aeginaeo aut Attico aut Aegyptio Herculi ſimile, ſed in ratibus ſtabat. Traditum vero eſt, hoc ſimulacrum Herculis ab Tyro delatum in Ionicum pelagus primum ad Heran Meſaten adpuliſſe. Ea ab Erythraeorum portu ſoluentibus in Chium, propemodum medio in curſu fuit. Cum rates a promontorio proxime abeſſent, Erythraei et Chii diuerſis ſtudiis ad ſuum quisque littus trahebant. Interea Phormio quidam Erythraeus ex morbo oculis captus (is Phormio antea e piſcatu victum quaeſiuerat) admonitus in ſomnio Erythraeos adiit, iuſſitque vt matres comam tonderent atque vt ex ea coma viri contexto fune ratem traherent. Id vero ingenuis mulieribus non eſt perſuaſum. Igitur Threiſſae, quae liberis natae parentibus, mercenariam vitam in vrbe agebant, tondendas ſe praebuerunt. Ex quo, cum Hercules, leniter ſequente rate, Erythras eſſet vectus, ſolas e Thracia mulieres intrare herois delubrum fas fuit. Funiculum iſtum Pauſanias ipſe ſe vidiſſe praedicat. Interſeritur huic loco etiam ea fabula, quod piſcator hoc facto viſum recuperauerit. Haec enim illorum temporum inſania et horribilis caecitas fuit. Memoriam huius religionis Ioannes Harduinus iudicat conſecratam fuiſſe in eo numo, quem Iacobus Sponius in

(9) f. 533.

in itinere Attico conſignauit. Eſt enim in aduerſa turritum vrbis caput, inſcriptumque ΕΡΥΘΡΑΙ in altera autem parte, prora nauis. A qua opinione non abhorrerem, niſi rates et prora nauis ad artis praecepta factae, nimium inter ſe diſcreparent. Malim igitur ad portus et nauigationes Erythraeorum in illo numo explicando reſpicere. Damaſtes Sigeenſis, Herodoti aequalis, in periplo(10) auctor eſt: *biremem Erythraeos primos feciſſe.* Fortaſſis ille hoc, vt alia, ex Hecataeo Mileſio. Colebant Erythris quoque Herculem cognomento Ipoctonum, φθαρτικὸν τῶν ἀμπελοφάγων ἰπῶν, *quoniam vermes, qui vites arrodunt, ſuſtulit.* Soli enim Erythraei ab hac peſte non vexabantur. Teſtis eſt Strabo. (1) Hae ſunt cauſſae, quae Erythraeos induxerunt, vt Herculis corytum et clauam in elegantiſſimis numis argentoque ſuo ſignarent. Suo inquam argento: erant enim fodinae argenti in agro Erythraeo, in quibus quae ratio fundendi metallum fuerit, Strabo oſtendit. (2) Exſtat praeterea apud Triſtanum numus Erythraeus Elagabali cum templo et ſimulacro Herculis, tum Otaciliae et Valeriani quoque numi cum vultu Herculis viſuntur.

A naue ad caput peruenimus: veteres enim Romani, quam nos in numo aduerſam, caput dixerunt, nauem autem, quam nos auerſam nunc appellamus, vt ex Macrobio et auctore de origine gentis Romanae conſtat. Harduinus in numo ſuo caput Alexandri ſe videre putat: ſed mea opinione Herculis eſt. Alexandrum ob genus Macedonum regum, ductum ab Hercule, ἀντὶ ταινίας καὶ ςέμματος καὶ πορφύρας

(10) apud Plinium l. VII. c. 56. (1) f. 709. (2). f. 155.

ϱας ϐασιλικῆς τῷ δέϱματι τῆς κεφαλῆς τȣ̃ λέοντος ſe deuinxiſſe, eumque cultum ſuper gemmis et vnionibus aeſtimaſſe, Conſtantinus Porphyrogenneta (3) animaduertit, ϗ μάϱτυς, inquit, ἀξιόπιςος ἀυτὸ τὸ νόμισμα τȣ̃ Μακεδόνος Ἀλεξάνδϱȣ ταιάυτῃ ἐικόνι καλλωπιζόμενον. Si is hoc non diceret, tamen tot numi qui exſtant, per ſe teſtarentur. At non idcirco omnes numi, qui capita hunc in modum ſignata praeferunt, illico Alexandrum potius monſtrant nobis, quam Herculem. Vt ille numus Luceriae vrbis apud Laurentium Begerum (4) et ex eo apud Bernardum Montefalconem, qui clauam habet et arcum et pharetram et caput iisdem fere lineamentis, vt Alexandri regis. Quid Luceriae cum Alexandro magis, quam cum Hercule? ſiue illa vrbs in Apulia, ſiue in Gallia Ciſalpina ſita fuit, quae hunc numum feriendum curauit. Nempe ſignantur Herculis et Alexandri capita multis in numis, *vt hominem homini ſimiliorem numquam videris alterum*: prorſus vt Syracuſani illi Menaechmi. Id quomodo euenerit, non poſſum certo aſſeuerare. Poſſum ſuſpicari, numos eos ad vnum omnes cuſos eſſe poſt Alexandrum, Herculem autem ad Alexandri vultum fuiſſe effictum imitatione artificioſiſſimorum Alexandri numorum, ob admirationem illius herois. Sic eum Lyſippus aere duxerat, nam vt ait Flaccus.

Edicto vetuit, ne quis ſe praeter Apellem
Pingeret, aut alius Lyſippo duceret aera
Fortis Alexandri vultum ſimulantia.

Illum

(3) de thematibus f. 22. ed. Bandurii (2) T. I. f. 317.

Illum vero artificem in caelum tulerunt, illum exprimere, ſi qua poterat, ſecunda gloria fuit. Sic Herculem cum ſignarunt, Alexandri vultum habitumque corporis et leoninam pellem ex numis eius ſurripuere. Nullum igitur Alexandrum eo cultu in numis agnouerim, niſi in Macedonicis, aut vbi nomen eius diſerte appoſitum reperiam. Non inficias eo, exſtitiſſe Ionum ſtudia in Alexandrum ea, vt in luco, qui ſupra Clazomenios et Chalcidenſes (hi proximi fuere Erythraeis) ſitus erat, Alexandrea agerent Paniones. Teſtis eſt Strabo. (5) Et exſtitere ſpeciatim in Erythraeos Alexandri beneficia: is enim (6) Chytrophoria inſulas (poſtea eaedem Hippi dictae) per duo ſtadia continenti iunxit et planitiem ſeptem millium et quingentorum ſtadiorum intercidi iuſſit, vt duos ſinus committeret et Erythras Mimante circumfunderet. Sed ſi Alexandrum Erythraei honoris cauſſa in aere fingere maluere, quam Herculem ſuum, cur nomen eius in tot numis non ediderunt? Praeterea numi omnes decem Alexandro ſuperſtite ſignari non potuerunt: eo autem defuncto recentia erant ciuitatum aut in Antigonum et Demetrium, aut in Seleucum aliosque principes ſtudia et adulationes. Tamen quis mihi ex omni antiquitate proferre poteſt numum ciuitatum Ionicarum illorum cum vultu regum? Satius eſt igitur Herculem agnoſcere in numis Erythraeis, cultu quidem ſuo, ſed habitu oris ad Alexandri ſimilitudinem. Id ſeu tantum artificum ſtudio imitandi Lyſippi, ſeu prae-

(5) f. 742. (6) Plinius l. V. c. 29. Pauſanias f. 529.

terea vrbis in Alexandrum quodam honore factum ſit, non interpretor.

Nomina, quae in nauibus numorum Erythraeorum cuſa fuerunt, haec ſunt

I. ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΗΣ ΔΗΜΑΔΟΣ *Aſclepiades Demadis filius.*

II. ΑΠΕΛΛΑΣ *Appellas.*

III. ΑΡΙΣΤΕΑΣ *Ariſteas.*

IV. ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. *Diopithes.*

V. ΠΕΛΟΠΙΔΗΣ *Pelopides.*

VI. ΔΙΟΝΥΣΟΣ *Dionyſus.*

VII. ΜΟΛΙΩΝ *Molion.*

VIII. ΧΑΡΜΗΣ *Charmes.*

IX. ΑΝΟΘΕΜΙΣ *Anothemis.*

X. ΞΩΠΕΙΡΟΣ *Sopyrus.*

Hunc Sopyrum e Patino me adieciſſe, ſupra commemoraui. Quem illi magiſtratum Erythris geſſere, vt eorum nominibus numi inſignirentur? Dicam, ſicuti ſentio, vbi res Erythraeas inde a principio percenſuero. Antiquiſſimis temporibus Erythraei in duodecim Ioniae populis cenſebantur et ad Panionium conueniebant.(7) Sed cum Samiis Chiisque proximiori neceſſitudine ab ſtirpe vsque deuincti, eadem cum iis dialecto vtebantur. Attamen ſiue per inuidiam ſimulacri Herculis, ſiue alia cauſſa, vt inter vicinos, bellum geſſere cum Chiis. Aliquando Λευκωνίας πέρι, (quae qualis ſit ſiue vrbs ſiue regio, haud ſane video) tam infeſtis animis certarunt, vt Chii ſe exceſſuros ſingulos cum chlaena et tunica ſponderent.

(7) Herodotus L. I, c. 142. 143.

derent. Monentibus tamen coniugibus, animum recepere ad audaciam et Erythraeos ipſo illo obſtinato furore perterruerunt. Auctor eſt Polyaenus. (8) Et erant mutua eorum odia inſatiabilia, vt Erythraei etiam hoſpitali iure, quo inter Graecos nullum maius, ſpreto, inter menſas enecturi fuerint Chios, niſi aliquis eos de diſcrimine admonuiſſet, vt Anticlides proditum reliquit. (9) Res quoque cum Mileſiis geſſere aduerſus Naxios, vt Andriſcus in rebus Naxicis et Theophraſtus auctores ſunt. (10) Libertate ſunt exuti a Croeſo Lydorum rege, vt tributum ex eo tempore penderent. Cum Cyrus aduerſus Lydos duceret, per legatos ad defectionem ſollicitati, conditionem cum ceteris Ionibus, praeter Mileſios, reſpuerunt: igitur Lydis victis et legatis, quos miſerant ad regem, ab eo reiectis, arma ceperunt et deſerti a Spartanis, quorum auxilium implorauerant, in deditionem venerant, deterioribus conditionibus, quam Lydi. Harpalus, qui Medos Cyro prodiderat, dux eo bello aduerſus Ionas fuit. (1) Victi captique auxilia Perſis tulere contra Caras, Cauconas aliosq; populos. Pertaeſi autem ſeruitutis, Hiſtiaeo Mileſio auctore, Ariſtagora duce, eiectis tyrannis popularem ſtatum vrbis reſtituerunt. Sex annos bellum eſt geſtum a Darii Hyſtaſpis praefectis, donec victis Ionibus Ariſtagoras ad Thracas perfugit, (2) Hiſtiaeus bellum infeliciter reſtaurauit. (3) Hiſtiaeus

 duce-

(8) l. VIII. p. 647. ed. Caſaub. (9) apud Athenaeum f. 384. (10) apud Parthenium Nicaeenſem in Eroticis c. 9. (1) Herodotus l. I. c. 169. (2) Herod. lib. V. c. 126. (3) Herod. l. VI. c. 1.

ducebat magnam nauium claſſem. Mileſii octoginta naues, Prienenſes duodecim, Miuſii tres, Teii ſeptemdecim, Chii centum, Erythraei octo, Phocenſes tres, Lesbii ſeptuaginta, Samii ſexaginta praebuerunt, vt ex eo de potentia ſingularum vrbium iudicari poſſit. Sed partem proditione, partem diſcordia, in ordinem redacti, Xerxem ſecuti ſunt in Graeciam. In pugna ad Mycalen, quae eodem die, Leutychide Lacedemonio duce, commiſſa eſt, quo victus ad Plataeas Mardonius, Iones defecere ad Graecos. (4) Erythraei Athenienſes maxime ſectati, fractis illis viceſimo Peloponneſiaci belli anno, defecerunt et Chiis contra Athenienſes opem tulerunt, vt Thucydides auctor eſt. Poſt id tempus tamen Athenienſibus fauerunt ducesque eorum copiis ſuis adiuuere. (5) Alexander benigne egit cum Ionibus: Antigonus ceterique Aſiae reges libertati eorum non ſunt aduerſati. Hoc maxime cognoſcitur ex foedere Smyrnaeorum et Magnetum pro Seleuco Callinico, quod in Arundelianis marmoribus inſigne eſt. Romanos rerum dominos ſummo honore coluere. Itaque Attalum Pergami regem bello Macedonico a Philippo rege mari pulſum in portum receperunt. (6) In bello aduerſus Antiochum regem Romanis quoque portum praebuerunt, ex quo maritimas vrbes ad defectionem ſollicitarent et triremes miſerunt ad augendam claſſem Rhodiam. (7) Quare bello

(4) Herod. l. IX. c. 102. ſeq. (2) Demoſthenes de Cherſoneſo f. 38 (6) Polybii excerpta p. 1013. (4) Liuius l. XXXVI, 45. XXXVII, 8. ll.

bello confecto Romani Erythraeos pro ſingulari fide, quam praeſtiterant, et agro donarunt et in omni praecipuo honore habuerunt. Ita Liuius e Polybio. (8) Hic praeterea addit, agro donatos, quem iure ſuum oſtenderunt eſſe. Bello Mithridatico Erythrae in poteſtate regis fuerunt, a L. Lucullo liberatae. (9) Reſtituto Capitolio, quod L. Scipione, C. Norbano Coss. conflagrauerat, C. Curio Cos. ad ſenatum retulit, *vt legati Erythras mitterentur, qui carmina Sibyllae Erythraeae conquiſita Romam deferrent.* Miſſi ſunt P. Gabinius, M. Otacilius, L. Valerius, qui deſcriptos a priuatis verſus circa mille Romam deportarunt, vt ex Feneſtella et Varrone et Apollodoro Erythraeo refert Lactantius Firmianus. (10) Herophile illa Sibylla fuit, quam Erythraei in antro Coryci montis apud ſe natam gloriabantur, patre Theodoro paſtore, matre nympha cognomento Idaea. (1.)

Ex his rerum Erythraearum conuerſionibus intelligi poteſt, ciues eius vrbis primum a Cnopo in formam reipublicae redactos, ſub Lydis Perſisque tyrannos accepiſſe, quibus eiectis vix ſextum in annum libertate potiti, iterum iugum ſubierunt. Pulſis tyrannis Ariſtagoras e conſilio Hiſtiaei Mileſii

ϛϱα-

(8) Liuius l. XXXVIII. 39 Polybius p. 1172. (9) Appianus p. 339. ed. Tollii. Tacitus Annalium l. VI. c. 12. et Hiſtoriar. l. III. 72. (10) Inſtitutionum diuinarum l. VI. c. 6, de ira Dei c. 22. (1) Pauſanias f. 827.

στρατηγὸς ἐν ἑκάστῃ τῶν πόλεων ἑκάστους *in ſingulis ciuitatibus praetorem vnum* inſtituit. Auctor eſt, Ariſtagorae fere aequalis Herodotus. (2) Is magiſtratus qualis apud Athenienſes fuerit, ſatis exploratum habemus. Sunt autem e ſingulis tribubus quotquot annis lecti numero ad decem, ita vt vndecimus polemarchus adiiceretur, tamquam praefectus. Eorum munus in his fere verſabatur, vt vrbem munirent et cuſtodirent resque ad arma neceſſarias ſeu bello ſeu pace procurarent: eorum quoque erant ἐξετάσεις καὶ συντάξεις, cenſurae quoddam genus, et tributi pro modo facultatum deſcriptio ad τριηραρχίαν, tum iudicia iis de cauſſis, ſi quis περὶ ἀποφάσεως ἢ καὶ περὶ ἀντιδόσεως poſtularetur, aut ſi quis bellum aciemque deſeruiſſet: pacis cauſſa, ſeu communicata re cum ſenatu, (vt in pſephiſmate de legatis ad Philippum apud Demoſthenem de corona), ſeu ex ſui ſententia collegii, (vt in decreto ſenatus in Antiphonis vita inuenio) legatos mittendi ius habebant. Id exemplum imitati ſunt Erythraei ceterique Iones, niſi quod vnum praetorem ſufficere putarunt, credo quod non ita magna vrbs eſſet. (3) Non diuturnus hic ſtatus fuit, Perſis tyrannos reſtituentibus, aut potius optimatum in vrbibus potentiam, cui magis fidebant, vt nouarum rerum minus cupidae. Ceterum iuſtum et aequum imperium fuit, vt Ariſtoteles in politicis auctor eſt: (4) καὶ ἐν Ἐρυθραῖς δὲ ἐπὶ τῆς τῶν Βασιλίδων ὀλιγαρχίας, ἐν τοῖς ἀρχάιοις χρόνοις, καίπερ καλῶς ἐπιμελουμένων τῶν ἐν τῇ

(2) l. V. c. 38. (3) Ariſtoteles Politicorum l. VI. c. 8. (4) l. V. c. 6.

τῇ πολιτείᾳ, ὅμως διὰ τὸ ὑπ' ὀλίγων ἄρχεσθαι ἀγανακτῶν ὁ δῆμος μετέβαλε τὴν πολιτείαν. *Erythris quoque, cum vrbs ſub Perſarum regum imperio paucorum dominatione regeretur antiquis temporibus, tametſi qui praeerant, bene rem publicam adminiſtrabant, tamen tantummodo idcirco motus populus, quod a paucis regeretur, rei publicae ſtatum mutauit* Summa igitur poteſtas ad populum deuoluta, qui praetores quotannis e corpore ſuo legit. Quemadmodum autem in plerisque Ioniae vrbibus antiquum Ariſtagorae inſtitutum, iterum excuſſa Perſarum dominatione, ſeruatum non eſt, vt ſummus magiſtratus praetor eſſet, ita Erythris nihil inuenio mutatum. Mileſii ſub Imperatoribus etiam archontas habuere, vt in numo Commodi ΕΠΙ. ΑΡΧ. ΜΕΝΕΚΛΕΟΥΣ. In numis Seueri Prytanean et Soterium, in Aurelii numo Euareſtum, in Gallieni Diogenem archontem Harduinus vidit. Prienenſes in eum modum archontem Iulium Saturninum in numo Valeriani, Chii Praſinum iterum et Aurelium Chryſogonum Epaphroditum et Cothyan Primum archontem ſignarunt. Samii in numo quodam ΕΠΙ. ΛΥCΑΝΔΡΟΥ. ΙΕΡΕ. *ſub Lyſandro Pontifice*, Epheſii plerumque aut Ἀρχιερέα aut Γραμματέα poſuerunt. Clazomenii ſub Claudio ΕΠΙ ΗΓΕΜΟΝΟΣ ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΟΥ ΚΛΑΖΟΜΕΝΩΝ in Iuliae Domnae numo autem ſub *Philone praetore iterum*. Haec ſunt teſtimonia leuium quarundam iis in ciuitatibus conuerſionum. At Phocaeenſes, Colophonii, Teii, Erythraei non niſi praetores habent in numis. Vt de Erythraeis tantum dicam, in numis ſub Traiano apud Harduinum

duinum ΑΥΤ. ΝΕΡΟΥΑΝ. ΤΡΑΙΑΝΟΝ. ΕΠΙ. CΤΡΑ. ΠΡΕΙΜΟΥ in Elagabali numo ΕΠ. CΤΡ. ΑΥΡ. ΝΕΙ ΚΩΝΟC. Β *ſub Nicone iterum praetore*, in Alexandri Seueri numo ΕΠ CΤ Π. ΑΙ. ΑΤΤΑΛΟΥ. ΤΟ. Β.

Volupe eſſet, hos decem praetores ſuis annis aſſignare, vt ea re aliquantum iuuari poſſit Ionicarum ciuitatum hiſtoria. Nunc, quoniam eius copia nobis non ſit, id agemus, vt ſaltem aliquam in aetatem numos inſeramus. Atque cum Herculis vultus omnia Alexandro ſimilia habet in his numis, ſequitur ex mea opinione, ſub extremam huius herois aetatem et paullo poſt cuſos eſſe. Idem poſtulat elegantia numorum. Nam Graecia his artibus vsque ad ciuile bellum popul. Romani enituit, ita vero vt Alexandri temporibus ſummum faſtigium conſecuta, labi paullatim et deficere ſit viſa. Ad poſtremum quae Harduinus de Erythris Boeoticis et de moneta a Thebis eam in vrbem translata praedicat, ea vero, vt dicam ſine iracundia, in officina Archontii Seueri, lepidi ſenis, cuſa fictaque ſunt. Illis temporibus cum Thebae euerſae, et poſt paullo cum hi numi cuſi ſunt, Erythrae in Boeotia, vt Tertullianeo verbo alia in re vtar, fuere nullae.

NVMVS

NVMVS GYRTONES *VRBIS THESSALICAE* ILLVSTRATVS

Auctore

T. S. B.

IN Graecarum vrbium memoria deſiderati adhuc ſunt Gyrtoniorum numi. Ioannes Harduinus, qui in vrbium populorumque numis illuſtrandis maxima laude paene vnus omnium verſatus eſt, huius vrbis numum alium, quam ex Pyrrhi Ligorii ſchedis nullum citat. Et illum ne deſcribit quidem, credo quod diffidebat Ligorii fidei, quem decoxiſſe ſatis conſtabat. (1) Lucas Holſtenius autem numum illum e Ligorii ſchedis ita deſcribit in caſtigationibus Stephani Byzantii: *Circum caput muliebre* ΓΥΡΤΩΝΙΩΝ *in cuius altera parte caput iuuenis cum galea criſtata conſpicitur, iuxta cuius frontem leguntur duae litterae* ΠΕ. *quas Ligorius, forte non male,* ΠΕΡΡΑΙΒΙΑΝ *ſignificare putat. Equidem* ἐπέχειν *malo.* Hunc, quem produxi, aeneum numum Buxbaumius ex oriente attulit, tanto artis lumine nitentem, vt alios eius ſimiles paucos, ab elegantiori autem opera et ingenio Graecos viderim nullos. Aduerſa ha- *M. Oct.* 1727.

 bet

(1) Vide Raphaelem Fabrettum in *Columna Traiani* et in *Collectione inſcriptionum* paſſim.

bet caput virile laureatum,cuius barbae ramentum metalli inter cudendum adhaeſit, quod eximiam artem aliquantum obfuſcauit. Eo eſt inſignior auerſa, quae caput matronae cum diademate refert et hanc epigraphen ΓΥΡ ΤΩΝΙ .... *Gyrtoniorum*.

Theſſaliam antiquitus Pelaſgi incoluere et iuxta eos Perrhaebi, vtrique teſtati et illuſtres Homericis verſibus, cum Theſſalicum nomen nondum exſtaret. Eodem auctore Homero, (2)

Οἱ Ἄργισσαν ἔχον καὶ Γυρτώνην ἐνέμοντο,
Ὄρθην, Ἠλώνην τε, πόλιν τ' Ὀλοοσσόνα λευκὴν
Τῶν αὖ ἡγεμόνευε Μενεπτόλεμος Πολυποίτης
Υἱὸς Πειριθόοιο, τὸν ἀθάνατος τέκετο Ζεύς.
Qui Argiſſam tenebant et Gyrtonem incolebant,
Orthen, Elonamque vrbemque Olooſſona albam,
Eorum dux fuit (bello Troiano) *Meneptolemus Polypoetes,*
Filius Pirithoi, quem immortalis genuit Iupiter.

At Guneus ex Cypho duas et viginti naues duxit, quem Enienes et Perrhaebi ſequebantur. (3) Fuere igitur Gyrtonii cum caeteris ciuitatibus foederatis ſui iuris et inter Pelaſgos cenſebantur, poſtea partem ſunt Perrhaebis, partem Theſſalis adſcripti. Strabo Perrhaebiae attribuit, quam iuxta Peneum vsque ad mare antiquitus protendi meminerat, minora vero in Homerum ſcholia Theſſaliae, Apollonii Rhodii ſcholiaſta (4) alterutri, Stephanus Byzantius vtrique: Γύρτων πόλις Θεσσαλίας

(2) Il. B. v. 738. (3) ib. v. 748. (4) l. I. v. 57.

σαλίας ϗ Περῤαιβίας, ἣν Ομηρος Γυρτώνην καλεῖ, ὡς Ιτώνην ϗ Ιτῶνα. (5) Scilicet quod Perrhaebia in Theſſalia erat ſita. Claudio Ptolemaeo quid acciderit, cum illius ſitum vrbis deſcriberet, non ſatis exploratum habeo, tantum coniecturis ducor. Ita in editis legitur:

ΠΕΛΑΣΓΙΩΤΩΝ

Γόννος μ'η. ιβ. – λ'θ.L'. ιβ.
Gonnus 48. 12.—39½.12.

Λάρισσα ν. – λ'θ. ς'.
Lariſſa 50. 0.—39. 6.

Φεραὶ ν. L' – λ'θ. ς'.
Pherae 50½. —39. 6.

ΣΤΥΜΦΑΛΙΑΣ.

Γυρτώνη μ'ς. L' γ'. – λ'θ. L'.
Gyrtone 46½. 3.—39. ½.

ΕΣΤΙΩΤΩΝ.

Φαιςὸς μ'ζ. δ'. – λ'θ. γ'.
Phaeſtus 47. 4.—39. 3.

Γομφοὶ μ'ζ. γ. – λ'θ. ς'.
Gomphi 47. 3.—39. 6.

ΘΕΣΣΑΛΩΝ.

Υπατα μ'ζ. L'γ. – λη'. L' ηγ'.
Hypata 48½. 3.—38½. 3.

(5) Sic quoque e Stephano Euſtathius ad Homeri Boeotiam f. 333. ed. Rom.

Stymphalia in Arcadibus fuit, ad quos nihil aut Gyrtone, aut hic Ptolemaei locus. Idcirco acutiſſimus Palmerius emendauit, vt eſſet ΣΤΥΜΦΑΙΑΣ. Stymphaea regio in Epiro eſt, ſuper Theſprotiis. Et huic regioni numeri quoque congruunt graduum, quos in Ptolemaeo poſitos cernimus Idcirco Gerardus Mercator vrbem quoque in Epiri finibus collocauit, ad quos nihil pertinere, vel ex eo certum eſt, quod Gyrtone haud longe a Lariſſa ſita fuit. Quare, vt plerique alii numeri, ita hi quoque in geographo corrupti fuerunt, nam verum ſitum Ptolemaeus ignorare non poterat. Si itaque gradus longitudinis emendes, habebis Gyrtonem ſuo in ſitu prope Lariſſam. Scribes autem ſic

Γυρτώνη μ'θ.L'γ'–λ'θ. L'. *Gyrtone* 49½. 3–39½

Ita ſcripſiſſe videtur Ptolemaeus, dein cum corrupti eſſent numeri, vt ad Stymphaeam quadrarent, ſciolus aliquis id nomen regionis inſeruit, ex quo iterum corrupto, facta eſt denique Stymphalia. Id autem ipſe vrbium ordo ſuadet. Nam Ptolemaeus monuit (6) ſe in qualibet regione ſitus oppidorum a borea proſequi, donec in noto deſinat. Itaque Gonni, Lariſſa, Pherae, Gyrtone, altera infra alteram tamquam auſtralior ponenda fuit. Addidit Ptolemaeus ſe ſitus quoque vrbium ab occidente verſus orientem citare. Sed illud in eo non eſt perpetuum. Hoc loco cum Epirum ſubiectam Macedoniae, in qua Theſſalos, tamquam minores et, vt tum erat, attributas gentes, cenſet, perpetuo reſpicit et

(9) l. II. c. 1.

et ad eam paullatim appropinquat, ſitus vrbium ab oriente verſus occidentem perſequitur. Sic Phaeſtus Gomphi et omnis Eſtiaeotis regio, ſic Theſſaliotis ad occidentem poſt Pelaſgiotas ponuntur et denique Phthiotis regio extrema eſt, quod et Pelaſgiotidi et Theſſaliotidi ad meridiem praetenderetur. Quae cum ita ſint, Pelaſgiotidi Gyrtona attribuit Claudius. Hieronymus apud Strabonem tradit (7) τὸ καλȣ́μενον Πελασγικὸν πεδίον *Pelaſgicum campum*, *vt tunc nuncupabatur*, habuiſſe vrbes *Lariſſam*, *Gyrtona*, *Pheras*, *Magnetin* et alias quasdam. Alia videtur eſſe Pelaſgiotis regio, ad quam nihil Magnetis, alius Pelaſgicus ager, in quo etiam Magnetis cenſebatur. Μαγνῆτις etiam Sophocli et Parthenio eſt Μάγνησις *Magneſia*, caput prouinciae eius nominis. Sed Ptolemaeus nullam prouinciam Magneſiam edidit. Vrbem Magneſiam et eius regionis alias tres Pelaſgiotis, ceteras vrbes Phthiotis adſcripſit. Ex quo vides errorem Plinii, cum Gyrtona in Magneſia collocat, veluti inter Pelaſgiotida et Magneſiam prouinciam nihil diſcriminis ſit. Decipere eum etiam Strabo poterat, (8) qui ſic fatus eſt: περὶ τὸν Πήνειον καὶ τὸν Πήλιον οἰκȣ̃ντες καὶ οἱ τὴν Γυρτῶνα ἔχοντες καὶ ἄλλοι πλέȣς *ad Peneum et Pelium colunt cum Gyrtonii, tum alii plures.* Recte de Peneo fluuio, at Pelius mons in Magneſia potius erat ſitus. Magneſiae igitur vrbs erat Gyrtone, ſi Pelio monti ſubiecta fuit. Aut denique ex eo natus eſt error, quod Plinius Gyrtoni finitimam vrbem Lariſſam eſſe acceperat,

(7) f. 505. (8) f. 503.

rat, eam autem iudicauit Lariſſam dici, quae ad Oſſam in Magneſia ſita fuit. Ad ſitum autem vrbis confirmandum oportebat animaduerti, quod tres iſtis in regionibus Lariſſae eſſent. Vna ad Oſſam in Magneſia, non admodum celebrata, nota tamen Straboni et Stephano, altera ἐπὶ θαλάσσῃ dicta Pauſaniae, Cremaſte cognomine, in Phthiotide, aliquanto interuallo a mari, tertia Pauſaniae παρὰ τὸν Πηνειὸν. Strabo et ex eo Stephanus Cremaſten illam etiam Πελασγίαν dictam fuiſſe teſtantur: ſed fortaſſis aliquis error ſubrepſit, vt id nominis attribuendum ſit potius Lariſſae ad Peneum, quam nobilem Theſſaliae vrbem vocat Liuius: (9) *Lariſſam*, inquit, *non illam in Theſſalia nobilem vrbem, ſed alteram, quam Cremaſten vocant, ſubito aduentu cepit.* In hac Lariſſa ad Peneum obiit Hippocrates Cous medicorum facile princeps atque in agro inter eam vrbem atque Gyrtona interiecto ſepultus eſt, vt e vita eius apud Soranum Epheſium cognoſcimus, cuius ad aetatem monumentum ſuperfuit. Ex quo etiam Ioannes Tzetzes in chiliadibus (10) θανὼν ἐτάφη μέσον δὲ Λαρίσσης καὶ Γυρτῶνος.

In antiquis fabulis quoque non obſcura fuit Gyrton. Fuit quondam *proles Elateia, Caenis,*

Theſſalium virgo pulcerrima, perque propinquas
Perque tuas vrbes (tibi enim popularis Achille)
Multorum fruſtra votis optata procorum, (1)

Il-

(9) l. XXXI. 46. (10) hiſtor. VII. Chil. CLV. 945. (1) Vide praeter Naſonem, Scholia in Apollonium Rhodium l. I. v. 59.

Illius amore virginis captus Neptunus, voti compos fit et poſt gaudia optionem permittit, quae vellet, petendi. Illa de amiſſo pudore praefata, in alterius conditionem ſexus tranſire cupit,

grauiore nouiſſima dixit
Verba ſono, poteratque viri vox illa videri,
Sicut erat: nam iam voto deus aequoris alti
Annuerat.

Scholiaſta Luciani, qui Samoſatenſi hoc ſcurra dignus obtigit, in Gallo, (2) fabulam hanc lepidiorem fecit, cum per ſe eſſet nequiſſima. Ait enim, puellam Neptuno negaſſe, ni iuraret, facturum ſe prius, quae ipſa petiiſſet: petiiſſe eo annuente, vt illico e virgine eſſet mas: feciſſe ita Neptunum Stygia numina et iusiurandum metuentem eaque mala fraude ductum voto excidiſſe potiundae puellae. Nec ſic tamen Caeneo conſiſtere licuit per Maronem, apud quem Aeneae in vmbris occurrit

Iuuenis quondam, nunc foemina Caeneus,
Rurſus et in veterem fato reuoluta figuram.

Vt Ouidius Perrhaebum, ita Palaephatus Peripateticus Theſſalum fuiſſe ſcribunt: at Hyginus tradit (3) Magneſium fuiſſe Caeneum Elati filium eundemque apud Gyrtonios egiſſe et ea in vrbe genuiſſe Coronum filium. Quid ſi cui per inſomnium porta eburnea immittantur hae cogitationes, Caenin et Caeneum vtroque ſexu alternis in numi partibus ſpectari? Quid? ſi Ar-

(2) p. 18. (3) p. 34. ed. Munkeri.

chontius ille Seuerus hunc quoque numum Rufo Celſo alicui, aut Ceionio Iuliano aut Fabio Soſiano, aut ſi cui alii fallendi artifici protulit, hi autem ex virili muliebrique eodem in numo vultu, talem nobis fabulam et Hyginum excuderunt? Plane, vt e numis Sidonis, Tyri aliarumque vrbium effictas eſſe fabulas contendis iucundiſſime Harduine. Si cui iſta non ſatis arguta videntur, huic per me licet conditorem auctoremque Gyrtones in illis ſignis quaerere: habemus enim iterum vtriusque optionem ſexus. Phlegyam primum in agro Gyrtonio conſediſſe reperio. Nam Strabo teſtis eſt, (3) ab eo Phlegya Phlegyas dictos, qui poſtea Gyrtonii dicti, a Gyrtone Phlegyae fratre, vt Stephanus Byzantius, aut a Gyrtona Phlegyae filia, vt eruditi in Apollonium Rhodium critici. (4) Haec vt intelligas, genealogiam apponemus

Siſyphus

Halmus

Mars = Chryſa

I	II
Phlegyas	*Gyrton*

I	II
Ixion = Dia	*Gyrtone*

Pirithous = Hippodamia

Polypoetes

Po-

(3) ſ. 503. (4) L. I. v. 57.

Polypoeten ducem ſecuti ſunt ad bellum Troianum, Homero teſte, Gyrtonii. Is, eodem teſte, Pirithoi erat filius, Pirithous Iouis. Nam alii, vt Pauſanias et docti Critici Apollonii Rhodii, Diam Pirithoi matrem Ioui ſuccubuiſſe ferunt, alii Ixioni marito filium hunc peperiſſe tradunt, in quibus eſt Apollodorus. Ixion Lapitharum, populi ad Peneum, rex, Phlegyam patrem habuit, vt ſcholia minora ad primam rhapſodiam, quamquam alii diuerſa tradunt: Phlegyas Chryſan matrem, Halmi filiam, Siſyphi neptem, vt Apollodorus γενεαλογεῖ. At Strabo Phlegyam hunc Ixionis fratrem prodit. Ergo Gyrton Phlegyae ſecundum Stephanum frater, frater quoque Ixionis, Gyrtone vero Phlegyae filia Pirithousque patrueles fuerunt. Quod aliter fuit, ſi communem fabularum fidem ſequimur. At Onomacritus vetus argonauticorum auctor Phalerum Alconis filium conditorem vrbis prodit his verbis. (5)

> Ἀλκωνος δὲ Φάληρος ἀπὸ Αισήποιο ῥοάων
> Ἤλυθεν, ὃς Γύρθωνος ἁλιςεφες ἔκτισεν ἄςυ.
> *Phalerus Alconis filius ab Aeſopo flumine*
> *Venit, qui munitam Gyrtonen vrbem condidit.*

Deinde eum cum Argonautis profectum eſſe canit. Alcon autem ille, Erechthei erat filius, Athenienſis.

Sed nihil horum in numo quaerendum eſt. Nam vt liquido dicam, nullius alterius vultus ille laureatus eſt, quam Iouis Olympii. Nam eo in agro Gyrtonii coluerunt, in quo ſedes huius religionis et numinis ad Peneum fluuium in Tempis Theſſalicis et ſummo Olympo fuit.

(5) v. 143. (6) Pauſanias ſ. 412. 417.

Matrona autem in auerſo numo Iuno Pelaſgia eſt, a Theſſalis maxime culta, a qua non diuerſam arbitror Iunonem Olympiam, niſi quod hoc nomine coleretur a mulieribus in Elide, cui etiam Iunonia celebrabant, quinto quouis anno Olympicum ſtadium ingreſſae.

Numus cuſus videtur florentiſſimis Theſſalorum rebus et arte fingendi in aere ad ſummum faſtigium euecta, hoc eſt, poſt Philippum Amyntae regem. Is enim cum tyrannos e Theſſalia eiecit, reſpirare ſibi ſunt viſi Theſſali et animos accipere. Ex eo tempore Philippus tam beneficiis, quam clandeſtina vi, Theſſalorum voluntates obnoxias tenuit, Quare Demoſthenes in Philippica tertia: (7) ἀλλὰ Θετταλία πῶς ἔχει; οὐχὶ τὰς πόλεις καὶ τὰς πολιτείας αὐτῶν ἀφῄρηται καὶ τετραδαρχίας κατέστησε παρ᾽ αὐτοῖς, ἵνα μὴ μόνον κατὰ πόλεις, ἀλλὰ καὶ κατὰ ἔθνη δουλεύωσιν; *at, qui ſtatus Theſſaliae eſt? nonne et vrbes ademit? et ſtatum rerum publicarum peruertit et quatuor principatus inſtituit, vt non modo ſingulae vrbes, ſed gentes quoque ſingulae ei ſeruiant.* Id tamen nihil offecit Theſſalorum rebus, qui aliter rationes ſuas de libertate inibant, quam populus Athenienſis. Sub Alexandro Magno militarunt Theſſali, fidiſſimi omnium et ab eo tempore Macedoniae regibus ſemper obnoxii A Philippo denique Demetrii filio oppreſſi Romanos gratanter acceperunt. Victo rege, T. Quintius Flamininus ἐλευθέρους, ἀφορολογήτους, νόμοις χρωμένους τοῖς πατρίοις, inter ceteros quoque iuſſit Theſſalos et Perrhaebos (8) Cum Antiochus Magnus Theſſaliam cum ex-

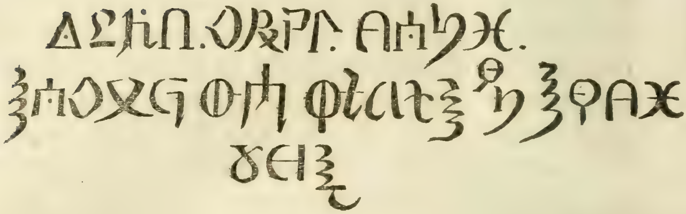
(7) f. 47. ed. Aurelianenſis. (8) Polybius p. 1108. 1111. Liuius l. XXXIII. 32.

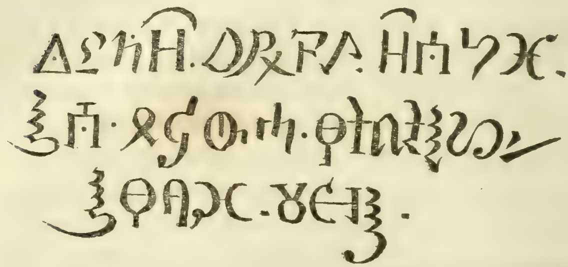
exercitu ingreſſus vrbes partem deditione, partem pugnando in poteſtatem accepit, Lariſſa fruſtra obſeſſa, Gyrton ne petita quidem e vicino armis. (9) Ex quo intelligi poteſt, vrbem fuiſſe munitiſſimam. Nam etiam Perſeus, cum Theſſalos ad ſocietatem belli aduerſus Romanos armis cogeret, Mylasque moenibus firmiſſimis vi cepiſſet, non auſus eſt Gyrtonem in propinquo ſitam tentare, quam T. Minucius Rufus et Hippias Theſſalorum praetor quam praeſidio intrauerant. (10) Extremum beneficiorum S. P. Q. R. in Graecos, libertas Macedonum. Poſt ea haud longe ab extrema ſeruitute Graecorum conditio diſcrepauit. Hoc illud ſpatium eſt, quo libertas Theſſalorum et Perrhaeborum primum a Philippo firmata, tum nequidquam a Philippo Demetrii filio et Antiocho et Perſe regibus attentata, Romanis opportuna vindicantibus, poſtremo ſub initium perturbationum in Romana republica oppreſſa eſt. Artium autem illarum, quae in aere fingendo metalloque verſatae ſunt, ſumma dignitas ſub Alexandri Macedonis aetatem fuit. Nam Plinius auctor eſt, (1) poſt Olympiadem centeſimam viceſimam artes eas ceſſaſſe, centeſima autem quinquageſima quinta reuixiſſe, cum tamen artifices fuere, illis, qui antea viguerant, longe inferiores. Hic numus tantum in arte decus ſeruat, vt ad illam priorem artificum aetatem referri mereatur.

(9) Liuius l. XXXVI. 10. (10) Liuius l. XLII. 54. (1) l. XXXIV. c. 8.

VETVS INSCRIPTIO PRVSSICA

T. S. B.





SIngulares eſſe has litteras, nec antea in Europa viſas, exclamabunt omnes talium curioſi: nos, vnde eas acceperimus, primum dicemus, tum ſententiam noſtram exponemus, quae cupio quidem, vt eruditis viris placeat, malim tamen, vt poſt me alii quod veriſſimum ſit inueniant, aut noſtram opinionem amplius confirment: fieri enim poteſt, vt res haec

haec tam exilis, aliquem fructum in hiſtoriam importet, ſi planius explicetur. Chriſtianus aliquis cum Philippo aliisque e Ciſtercienſium diſciplina inter primos fuere, qui in Oliuienſe monaſterium Samborii liberalitate inſtitutum conceſſerunt. Et Chriſtianus quidem Freieualdenſis in in monaſterio Coluicenſi litteris, vt tum erat, ſic ſatis eruditus, in Oliua factus eſt Abbas. Is cum animaduerteret, in Prutenis non modo e plebe homines, ſed ſummo loco et potentia ad religionem veri numinis commoueri, cum Philippo ſuo profectus eſt Romam ad Innocentium III. vt eum de his, quae in Pruſſia fiebant, quaeque ſibi videbantur, admoneret. Roma anno cIↃCXCVIII. cum mandatis ad archiepiſcopum Gneſnenſem rediit, cui, quae epiſcoporum muneris eſſent, a Pontifice commendata ſunt interea, donec ſuos Epiſcopos Pruteni acciperent. (1) Anno cIↃCCXIV. Chriſtianus Varpodam et Suauabrimum principes viros e Prutenis, tamquam primitias Romam deduxit, et Varpoda quidem Philippi, Suauabrimus autem Pauli nomine initiati ſunt. Philippus Lauſaniam, quam tenuerat, Paulus Lubouiam, dono dedere Ciſtercienſium ordini. Innocentius anno poſt, donationem confirmauit et Chriſtianum Pruſſiae primum epiſcopum fecit. (2) Inſecuta ſunt ea tempora, quibus expeditionem ſacram ſuſceperunt equites Teutonici, ſubactaque quadam Pruſſiae parte, anno cIↃCCXLI

(1) Haec et cetera omnia ex diplomatibus accepimus, quorum quaedam in decretis et epiſtolis Innocentii III. a Baluzio editis, alia in Lucae Dauidis chronico MSto reperiuntur. (2) E bulla Pontificis et chronico Montis Sereni p. 109. Monachus Trium Fontium p. 444, 445.

clↄccxl I. Chriſtianus diem obiit. Is, quae ad ſuperſtitionem Pruſſorum hiſtoriamque veterem et expeditionem ab equitibus Teutonicis ſuſceptam pertinebant, diligenter conſignauit in libro, (3) qui nunc quidem aut latet in tabulariis aut certe nobis periit. Vſi autem eo ſunt Simon Gruna, monachus Dominicanus et ille pater hiſtoriae Prutenicae Lucas Dauid, qui ante hos centum et quinquaginta annos et amplius, commentarios ſuos excuderunt, nondum publice editos. Ambo e Chriſtiano epiſcopo inſcriptionem vexilli Prutenici ſuis ſcriptis inſeruerunt. Quae quia in Simonis Grunae MS. quod apud Regiomontanos in bibliotheca Auguſta exſtat, nonnihil differt ab ea, quam Lucas Dauid expreſſit in autographo, ex quo in eadem bibliotheca nos noſtrum exemplar deſcripſimus, idcirco primum e Gruna, tum deinde etiam e Dauide inſcriptionem ſub principio poſuimus. Caſpar Schuzius quoque numos quosdam ex agro erutos in chronico producit litteris non abhorrentibus ab illarum forma: de quibus tamen hoc loco non dicemus.

Duae opiniones de his litteris obtinuere adhuc inter populares meos. Nonnulli ab otioſis confictas eſſe opinati ſunt: alii runas eſſe contenderunt. Vtrique mihi compendium facere ſunt viſi. Nam quae quis non intelligit, ea, ſi ſomnia et nugas dicat eſſe, in perpetuum ſe expedire videtur ab inquirenda veritate, ne tamen confiteatur ſe hominem eſſe et aliquid ignorare: qui autem runas eſſe perhibent, hi ſibi videntur aliquid dicere, dum

(3) Cui titulus is fuit: *Liber filiorum Belial et de eorum ſuperſtitionibus.*

dum nobili quidem, ſed obſcura voce alios abſterrent, ne quaerant amplius. Hos ego patienter audirem, ſi runas recordarentur a ſeptemtrionalibus populis dici cuiusuis litteras gentis, non eas modo, quae in ſaxis Sueonicis, Noruagicis, Islandicis, Danicis inciſae ſunt. Sic *Griſkar runir*, Graecas, *Ira runir*, Irlandicas, *Groelandoukar runir* Gronlandicas vocant, teſte Arngrimo Iona in Crymogaea, et *Vplandoukar runir* et *Venda runir*, ne quid dicam de *Sigrunar* ſeu magicis ad incantationem characteribus. Iſtum in modum per me quisque has quoque Prutenicas runas nuncupet, dum ne aliud ſe dicere putet, quam ἀυτὸ τȣ̃το, γϱάμματα. At illi noſtri aliter ſentiunt. In Britannia veteres Saxones runis ſeu litteris ſeptemtrionalibus vſos eſſe, ex eo coniicit Georgius Hickeſius, (4) quod, cum ab Aelfredo rege ad Romanum Francicumque ſcribendi modum Saxonica ſcriptura conformata eſt, veſtigia tamen runici characteris manſerunt, vt e ſpecimine codicis Lichfeildenſis apparet. (5) Francos etiam et Alemannos ſeptemtrionalibus his ruinis aliquando vſos fuiſſe, Olaus Vormius in litteratura Danica ex Auentino et Lazio colligit. Id quoque e Francico alphabeto intelligas, quod Mabillonius libro quinto rei diplomaticae exhibet. In eum igitur modum aliqui hos ad orientem populos, et Prutenos veteres a Scandinauis runas accepiſſe contendent. Sed tanta in ignoratione runarum ſeptentrionalium verſantur,

(4) In Theſauro linguar. ſeptemtrional. T. I. praef. f. xxxv.
(5) In Grammatica Franco Theotiſca. f. 3. 4.

vt operoſa confutatione nequaquam indigeamus. Qui fidem Chriſtiani ſuſpectam habent, duobus monumentis refelluntur, quae doctiſſimus Meſſerſchmidius Gedanenſis ex oriente deſcripta ſecum attulit et Societati noſtrae communicauit. In his enim idem litterarum genus magna cum voluptate conſpeximus.
Tab. 28 *I. II* Primum monumentum eſt inter *Teſcham* et *Ioerbam* fluuios in Ienizeam ſe effundentes in deſerto Kirgiſico, loco inter agreſtes tumulos eminenti, repertum. Alterum autem ſaxum in editiore colle Kirgiſici deſerti ex aduer-
Tab. 28. *III. IV.* ſo profluentium in *Vybathem Bee* et *Nonach* oſtiorum poſitum fuit.

Quales nunc dicemus eas litteras eſſe? Nihil valde aſſeueranter dixerim. Attamen intelligere mihi videor, populos ad Caucaſum atque in omni tractu ſeptemtrionali vſos eſſe peculiari hoc genere litterarum. Clemens Alexandrinus in Stromatis (6) ex Pherecyde coniecturam duxit, Scythas certa ſymbola adhibuiſſe. Sed Faſti Siculi, qui in Heracleo minore deſinunt, inter gentes litteratas recenſent, Sarmatas, Scythas, Cappadocas, Iberos ſeu Georgianos et Baſtarnas. Et Euſtathius in Homerum, (8) illorum populorum litteras his verbis attigit: ϰ̀ τῶν τινες ὕϛερον Σκυθῶν ἐσήμαινον, ἃ ἤθελον, εἴδωλά τινα ϰ̀ πολυειδῆ γραμμικὰ ξέσματα ἐγγράφοντες, ἤτοι ἐγγλύφοντες πίναξι, τȣτέϛι σανίσιν ἀλλοίαις τε ϰ̀ ταῖς ἐκ πύξων, *quidam*, inquit, *poſteriorum*

(6) *f.* 567. (7) p. 60. ed. Rad. (8) f. 632. ed. Rom.

rum aetate Scytharum, quae vellent, ſymbolis quibusdam ſuis notabant, variaeque ductus figurae inſcribebant aut inſculpebant potius tabulis ſeu aſſeribus, tum aliis, tum buxeis. Τοὺς ὕστερον Σκύθας vocat iſtas, quae veterem Scytharum ſedem occuparunt, alterius ſtirpis et corporis gentes. Tabulas etiam Graeci veteres adhibuerunt, ex quo ὁ πίναξ καὶ τὸ πυξίον *liber* dicebatur, et ξύειν *ſcribere*, vt alibi Euſtathius. Sic Romani ab rudium aetatum more *tabulas* appellarunt ſeu legum ſeu teſtamentorum codices. In Scythia et Thracia lapides litteratos paſſim exſtitiſſe, Herodotus (9) planis verbis teſtatur eosque Seſoſtri et Aegyptiacae expeditioni attribuit. Iornandes Geta, ſeu Alanus potius, ſcribit, auum ſuum Periam notarium fuiſſe apud Candacem regem Alanorum inferiorem Moeſiam tenentium. His addit: *ego quoque, quamuis agrammatus* (Latinis puta litteris nondum inſtitutus) *ante conuerſionem meam notarius fui.* Suas igitur et peculiares litteras Alani adhibuerunt.

Nicolaus Keder digniſſimus illa nobilitate et virtutum et doctrinae humanitatisque gloria, in numis Gothicis, quos magna cura collegit, ſibi ipſe minime ſatisfecit, quod runas nullas vsquam reperiret. Nec poterat aliter fieri, cum Scandinauicae runae fruſtra quaererentur in numis nec Sueonicis, nec Geticis. Nam quod doctiſſimi viri numos Macedonios et Thracios, ab illa

 elu-

(9) L. II. c. 106.

eluuione gentium paſſim diſſeminatos, Hiſpanicos etiam quoſdam a Gothis ſuis conflatos opinantur, in eo nimium pietati patriae, qua omnes populos antecellunt, tribuiſſe videntur. Is ipſe numus, in quo Kederus amiciſſimus Othinum ſibi reperiſſe videtur, ex illa ſeu Macedonum ſeu Thracum officina exiit. Teſtimonio eſſe poſſunt numi qui extant indubitatae fidei Macedonici et Thracici, quos ſi cum his conferas, de quibus dubitatur, quosue tamquam ex inopia conſilii et ex deſperatione Gothicos nonnulli etiam in Italia et Gallia vocarunt, nihil prius in mentem veniet, quam id quod ſentio et dico. Vnum eximium habet cimeliarchium Imperatorium, plane talem, vt ſunt caeteri omnes, quos Gothicos dicunt, ſed in quo Π Graecum diſerte ſcriptum eſt, veluti hic in figura vides, vt Perdiccam poſſis agnoſcere alterutrum, nam id ego nunc non ago. Tametſi igitur in his numis fruſtra quaeſitae litterae Alanorum et Getarum, forte et vetuſtiorum Scytharum, tamen mea opinione, his quae produxi, monumentis conſeruatae ſunt.

Tab. 28. Fig. V.

Inter primos populos, qui litteras ad ſermonem adhiberent, Syri et Phoenices fuere, a quibus Graecos edoctos fuiſſe ſatis conſtat. Dolendum eſt tamen, ita periiſſe nobis Phoeniciarum memoriam litterarum, vt ex numis Punicis et Palmyrenis Perſicisque monumentis nondum plane reſtitui potuerit. Bernardus Monteſalco in Palaeographia Graeca (10) infeliciter tentauit aliquas lit-

(10) f. 118. vide Diarum Italicum eiusdem p. 365.

litteras reducere, vſus eſt enim numis principio truncatis littera vna, vt numus alius extremo caret apud Nicoluum Haymum Romanum. (11) Apud Haymum tamen is ipſe numus, quem Demetrio inſcriptum Monteſalco exhibet, integris litteris omnibus reperitur. (1) Huic vni numo multum debemus, nec deſperandum eſt, in reſtituendis litteris Phoeniciis progreſſus inſignes fieri poſſe, ſi quis huic negotio ſe dedat. Litterae autem Phoenicicae minores exſtant in numis, maiores quadrataeque, forte et antiquiores in monumentis Palmyrenis. In monte Sinai quoque inciſae ſunt litterae, quas Coſmas Indicopleuſtes Iuſtiniano imperante vidit. Earum aliquas Athanaſius Kircherus in prodromo Copto et Oedipo edidit, alias mecum communicauit clariſſimus Lacroſus e ſchedis Egmontii de Nyenborg nobilis Batavi, qui anno cIↄ Iↄccxxi. eas de rupibus Sinai montis deſcripſerat. Plane autem cum Phoenicicis, vt in numis exſtant, conueniunt. Phoenicicae litterae in Perſiam quoque commigrarunt, vt alibi e Diodoro Siculo monui. Apparet id etiam ex inſcriptionibus Perſepolitanis. Ab hac ſtirpe Parthicae quoque litterae propullularunt, quibus ad hanc vsque aetatem Gauri, Magorum reliquiae, pulſae ex Perſia quidem, ſed in India receptae, vtuntur. Primus eas Thomas Hyde Europaeis oſtendit. Armeni et Perſicis et Graecis litteris ſunt vſi, teſte Moſe Chorenenſi in genealogia Armenica poſterorum Iapeti. (2) Is ſuo tempore vetuſta prouinciarum, vicorum, aedium, pri-

(11) N. Theſoro Britanico. t. I. p. 105. (1) t. I. p. 100.
(2) p. 9. 410. ed. Amſtelod.

priuatarum litium foederumque acta Perſicis Graecisque litteris exſtitiſſe, Armenicas autem litteras ante Mieſrobum neminem inſtituiſſe ſcribit. Rem omnem ita narrat Moſes Chorenenſis. Cum chriſtiana religio auſpiciis Tiridatis regis tertio poſt Chriſtum natum ſeculo per S. Gregorium in Armenia radices egiſſet, ex eo tempore Mieſrobus Varasdati et Arſacis IV. a ſecretis, vir religioſus et pietatis augendae cupidus, relicta aula conceſſit in monaſterium. Atque cum eſſet Graecae linguae peritus, non modo praelegere populo ſacras ſcripturas ſolebat, ſed etiam interpretari. Graeci alii ſacerdotes ignari Haicanae linguae praelegebant quidem Graeca, ſed qui interpretaretur, erat nemo. Haec res commouit Mieſrobum, vt apud animum ſuum conſtitueret, Graeca Armenice traducere. Nequidquam hoc tentabat, niſi ſi litterae exſtarent, quibus ea commode tranſcriberentur Communicato conſilio cum Iſaaco patriarcha Armeno, adiit Abelem quendam, quem audiuerat id ipſum agere, vt efformatis ſecundum Graecos litteris, Haicanum ſermonem litteratum efficeret. Cum autem imperfecta omnia iſthic reperiret, ad Danielem epiſcopum in inferiori Meſopotamia et Edeſſae ad Platonem rhetorem tabulario praefectum adit formasque litterarum fabricari inſtituit. Sed cum Plato in talibus parum ſe proficere videret, Epiphanium commendat magiſtrum ſuum, hominem perquam eruditum. Ad eum profectus Mieſrobus Samoſatam, acceptoque, diem obiiſſe Epiphanium, cum Ruſino diſcipulo Epiphanii Grae-

Graecis litteris doctiſſimo rem communicat, nec hilum proficit. Huic loco Moſes Chorenenſis τὸν θεὸν ἀπὸ μηχανῆς aduocat. (3) Mieſrobo viſum videre animi cogitatione manum inſcribere lapidi omnes litterarum formas copulationesque Armenicae ſcripturae. Protinus Mieſrobus ita vt animo conceperat rem, Rufino oſtendit et perfecit. Perfecit autem, vt ait Moſes, litterarum formis e Graeco deriuatis, reuerſusque in Armeniam Iſaaco patriarchae expoſuit, hic autem regi Vramſchapo. Rem placebat conferri cum Theodoſio Graecorum imperatore et Attico patriarcha CPlitano, interea Iſaacus et Mieſrobus mittunt Edeſſam, Alexandriam Athenas et CPlin iuuenes, qui Graecis litteris inſtituti ſacras ſcripturas Haicana lingua interpretati ſunt. Easdem litteras Mieſrobus Iberibus et Georgianis tradidit, teſte Moſe Chorenenſi (4)

Haec ita de origine litterarum Armenicarum et Ibericarum Armeni. Ego vt non negauerim, eſſe quandam Graecarum Armenicarum et Georgianarum litterarum conuenientiam, vt aliae ex aliis ſint ductae, tamen id potius mihi ſentire videor, ex Graecis litteris factas eſſe Ibericas, ex Ibericis demum Armenicas, Ibericas vero antiquiores eſſe, vulgatasque per populos Scythicos, Alanicos, Geticos vsque in extremum orientem penetraſſe. Sane, ſi quis haec, quae produxi, tum Prutenica, tum neſcio cuius populi in diſertis Kirgiſicis

(3) p. 401. (4) p. 412.

ſicis monumenta inſpiciet atque cum Ibericis litteris conferet, is minime dubitauerit, ſummam earum litterarum congruentiam animaduerti. Duo autem ſunt genera litterarum Ibericarum, minora, quibus maxime vtuntur, ſed recentia, tum maiora, ſed vetuſta. Primum quod ſcio, alphabetum Ibericum vulgatum eſt in Europa anno cIↄIↄcxxix. typis Congregationis Cardinalium de propaganda fide, cum quibusdam ſpeciminibus linguae. Sed minores tantummodo litterae eo in libello excuſae fuerunt. Eodem anno iisdem typis Stephanus Paolinus, adiuuante Nicephoro Irbacho Georgiano monacho S. Baſilii, edidit lexicon Georgianum et Italicum, in quo etiam alphabetum illud minus principio libri poſitum eſt. Maiores autem litteras primus nobis deſcripſit Franciſcus Maria Maggius Panormitanus, Clericus regularis Romae iisdem typis, anno cIↄIↄcLxx in ſyntagmate linguarum orientalium, quae in Georgiae regionibus audiuntur. In his prima eſt inſtitutio Georgianae linguae. Ex Maggio litteras illas Andreas Mullerus Greiffenhagius produxit. Praeterea Romae doctrina chriſtiana Bellarmini et Litania Mariae Lauretanae edita ſunt Georgiana lingua.

Tab. 28. *Fig. VI.* Vt igitur Ibericae litterae cum his Prutenicis et illis Kirgiſicis comparari poſſint, appoſui eas hic in tabula. Vnum adhuc aduertet lectorem, quod in monumento figuram ſtatuae plane Aegyptiacam cernit. Hoc nobis minime aduerſum eſt. Nam in Colchide, vnde has litteras profectas diximus, multa veſtigia Aegyptiacae

ſtirpis

ſtirpis cum ab Herodoto tum ab aliis animaduerſa ſunt. Herodotus ſic ait : (5) Φαίνονται ἐόντες οἱ Κόλχοι Αἰγύπτιοι, νοήσας δὲ πρότερον αὐτὸς, ἢ ἀκέσας λέγω *Colchi videntur Aegyptii eſſe : id dico, quod iudicio quodam meo et ſenſu animaduerti, prius quam ab aliis idem referri accepi.* Et Colchi quidem, quos percunctatus eſt, e priſca memoria aſſeuerabant, maiores ſuos ab Aegypto profectos. Aegyptii non ita aſſeuerate quidem, attamen vt opinarentur Colchos ab Seſoſtris exercitu iis in regionibus relictos fuiſſe colonos. Argumento erat, quod vultus Colchorum Aegyptiaca ora referrent, quodque ſoli illis in tractibus Colchi et Aegyptii lini fabricas haberent et quod lingua vtriusque populi congueret, quod poſtremum maximi facio. Dionyſius Periegetes (6) idcirco quoque

Πὰρ δὲ μυχὸν Πόντε, μετὰ χθόνα Τυνδαριδάων
Κόλχοι ναιετάεσι, μετήλυδες Αἰγύπτοιο.
Ad intimum Ponti receſſum, poſt terram Tyndaridarum
Colchi degunt, colonia Aegypti.

Itaque mirum non eſt, ſi e Colchide et Iberia aliquid Aegyptiacis ſimile ad vicinas gentes vna cum litteris penetrauit.

(5) l. II. c. 104. (5) v. 688.

NICOLAI BERNOVLLI
Ioh. Fil.
V I T A.
C. G.

ANnum cIↄ Iↄ ccxxvi. vti ſingulari *CATHARINAE AVGVSTAE* clementia memorabilem, ita duplici funere luctuoſum Societas noſtra habuit, quando paullo ante publicum illum Academicorum conuentum Imperatricis praeſentia illuſtrem, *Michael Burger* primus, deinde et *Nicolaus Bernoullius* e viuis diſceſſerunt. De *Burgeri* quidem vita nihil admodum dicendum habemus, donec certiora nobis documenta offerantur, interea non poſſumus quin vitam *Nicolai Bernoulli* collegae deſideratiſſimi et grato animo recolamus ipſi, et aliis, quibus res noſtrae ac bonarum artium incrementa curae ſunt, ſeruandam commendemus.

Originem duxit e gente, quae primarias in Heluetia dignitates iam inde a longinquo tempore obtinuit. Auus eius paternus fuit *Nicolaus Bernoullius ſupremi in Republica Baſileenſi tribunalis Aſſeſſor*, huius filius natu maximus *Iacobus Prof. Math. Baſileenſis.* Secundus *Nicolaus Reipubl. Baſil. Senator Pater Nicolai Bernoulli Profeſſoris Log. Baſileenſis.* Tertius *Iohannes, Profeſſor Math. Baſil.* Quartus *Hieronymus*, *mercator*. Mater Nicolai noſtri ſuperſtes eſt *Dorothea*, *Danielis* *Falkneri* filia, cuius auos pro-

proauosque a multis ſaeculis vel inter praeſides vel certe inter praecipuos qui eiusdem Reſpublicae gubernacula tenuerunt, numerari conſtat, ita vt dubitari poſſit, vtrum maiorem haec familia claritatem ex ampliſſimis muneribus, quibus domi praefecta fuit, acceperit, an maiorem ſuae familiae famam atque celebritatem *Iacobus Bernoullius* et *Iohannes* frater, huiusque filii et fratris filius incredibili rerum penitus abditarum ſcientia intulerit. *Iohannem* autem *Bernoullium* Nicolai noſtri patrem ſine elogio nominare praeſtat, quam committere vt tanti viri merita tam longo tempore ab acutiſſimis iudicibus publice cognita et commendata mediocri laude minuantur.

Natus eſt Nicolaus VI. Calend. Febr. *ſt. v.* A. CIↃ IↃC LXXXXV. Baſileae, ſed infans vix octomeſtris cum parentibus ſuis Groningam migrauit, qui poſt decem annos elapſos tribus aucti liberis Baſileam reuerterunt. Erat in noſtro a prima pueritia ingenium ductile et ſequax, et quaedem alacritas quaſi connata, quam ob rem nihil omiſerunt parentes, quod ad primam filii educationem (erat enim natu maximus) pertineret. Octo annorum puer germanice, gallice, belgice et latine loquebatur. Viſusque fuit, dum in Heluetiam ex Belgio redirent, ſi qua in vrbe paullum moraretur et linguam et mores hominum imitari ex tempore. Patriae redditus, litteris ſedulus incubuit. A. CIↃ IↃCCVIII. ciuium Academicorum, A. CIↃ IↃCCXI. Doctorum Philoſophiae numero, patre *Decano*, adſcriptus, quo tempore cum ſextum et decimum annum egreſſus eſſet, ac de vitae, quod eligeret, genere deliberaret, etiamſi amabat litterarum ſtudia, tamen

men quod aegre ferret vitam illam quaſi vmbratilem et ſeceſſum quem requirunt, parum abfuit, quin ea relinqueret omnino, niſi patris exemplo atque auctoritate confirmatus fuiſſet. Idcirco momentis omnibus probe expenſis animum ad Iuris prudentiam conuertit; erat autem illud aetatis Geometriae non ſolum peritus, ſed in hac ſcientia excellens, et quae reliquit illo tempore ſcripta, oſtendunt eum *Arithmeticae Differentialis*, *Integralis* et *Exponentialis* iam tunc gnarum ac difficillimis in Matheſi problematibus ſoluendis parem fuiſſe, quin imo patrem in ſcribendis ad exteros eruditos epiſtolis, quarum argumenta ex recondita Matheſi petita erant, ſubleuabat identidem, ita vt tanto magiſtro vſus, breui tempote plus ſciret quam ipſe ſibi didiciſſe videretur. Id vero apparuit, cum amore fraterno ductus, Danielem Bernoullium, qui vndecimum annum agebat, iis ipſis doctrinis inſtitueret, quanquam paullo poſt agnouit, ſe diſcipulum nactum eſſe, cui quod porro diſcendum ſtatueret vix ipſe inueniret. Sed his rebus occupatus nihilo minus Iuris prudentiae, quam ſibi delegerat, operam dedit, praeceptore vſus *Iacobo Battierio* celebri dum viueret Iuris Anteceſſore Baſileenſi, eo ſucceſſu, vt Idibus Nov. A. cIↄ Iↄ ccxv. poſt publicam *de Iure detractus* diſputationem, *Licentiam*, quam vocant, ad ſupremos in Iure honores impetraret.

Occaſionem deinde ſibi a patre oblatam in peregrinas terras proficiſcendi ſumma cum voluptate arripuit, qua in re partim indoli nouarum rerum quas diſceret atque tractaret cupidiſſimae obſecutus eſt, partim

con-

conſuetudini gentis ſuae, quae adoleſcentibus augendae apud exteros doctrinae et humanitatis cauſſa quandam videtur peregrinandi legem impoſuiſſe, ſatisfecit. Inter Italos cum aliquamdiu moraretur, in amicitiam illuſtrium virorum *Poleni*, *Manfredorum*, *Riccati etc.* receptus fuit. *Reghino* autem et *Fabriſio*, in quibus tam morum elegantiam quam iudicii acumen ſpectabat, familiariſſime vſus eſt, in Galliam deinde progreſſus Lutetiae Pariſiorum *Monmortium* et *Varignonum* in primis coluit. Iam in eo erat, vt magnum ex peregrinatione fructum perciperet, ſed morbo repente afflictus, cum ſpem per plures regiones eundi acciſam videret, mutato prorſus conſilio in patriam, quam primum potuit, curandae valetudinis cauſſa remigrauit A. cIↃ IↃCCXVIII. vbi inſtauratis viribus Matheſin rurſus maiore quam vnquam antea contentione exercuit, inuenta ſua digeſſit et litterarum commercia cum eruditis vel continuauit, vel noua inſtituit. Interea ab amiciſſimo Fabriſio identidem vt Italiam reuiſere vellet, incitatus, tandem repugnare non potuit cum ſimul ab illuſtri *Vezzio* Nobili Veneto qui ad multiplicem qua praeditus erat, doctrinam, matheſeos quoque ſcientiam adiungere gaudebat, humaniſſime inuitaretur. Huius viri erga ſe adfectum ac beneuolentiam ſaepe praedicauit. Vtebatur autem eius contubernio duos annos circiter, nec a latere illuſtris viri diſceſſiſſet, niſi patris iuſſu Baſileam fuiſſet reuocatus A. cIↃ IↃ CCXXII. vbi mox data occaſione munus *Profeſſoris iurisprudentiae* ambiuit et in tribus competitoribus fuit qui ſorte certabant. Poſtulant enim leges Baſileenſes, vt candidati, qui digniſſimi

aliquo munere habentur tres omnino eligantur communibus ſuffragiis, vnus denique ex tribus ſorte vincat, quam cum hic aduerſam ſibi expertus eſſet, paullo poſt, initio anni cIↄIↄccxxIII. Bernam honorifico ſenatus decreto vocatus (ea enim in vrbe ſorte non certatur) ad ſimile munus conceſſit et quae ſolent ingenii atque ſcientiae ſpecimina edidit.

In hoc ſtatu cum ex animi ſententia viueret, atque in amicitiam *Tillieri* et *Sinneri*, primariorum virorum ciuitatis ſuo merito veniſſet, ita erat huic vrbi addictus, vt ab his amicis et hoc genere vitae, quamuis alio ſemel atque iterum aequiſſimis conditionibus vocaretur, diuelli non poſſet. Vnum permoleſte tulit, quod fratris contubernio, qui eo tempore erat Venetiis, tam diu carebat, quem non modo vt fratrem et diſcipulum, ſed velut amicum et familiarem, et ſibi maxime neceſſarium diligebat. Fuit quidem certe inter eos animorum conſenſus atque concordia ſingularis, nihil accidebat alteri quod alter ad ſe pertinere non putaret, neque ſatis habebant permiſcere ac mutuo amore confundere quidquid vterque in Matheſi ſuo ingenio excogitauerant, in lucem edere parabant has ipſas lucubrationes communi nomine, vt omnes intelligerent, hoc inuicem affectu atque indulgentia fuiſſe par fratrum Bernoulliorum. Ex quo iudicari poteſt, quanta cum voluptate oblatum ſibi munus in Academia Petropolitana vterque ſuſceperint. Praeterea et *Daniel Bernoullius* conditiones atque praemia ſub idem tempus in alia regione ſibi deſtinata, ſpe maioris lucri, quod in fratris conuictu poſitum erat, repudiauit, ita vt ambo agnoſcerent illuſtris Praeſidis noſtri prouidentiam

tiam, quo auctore atque adiutore factum eſt, vt quos fatalis quaedam ſors in ipſa patria diſiunxiſſet, eos fortuna minime exſpectata in terra tam diſtante rurſus conſociatos foueret. Igitur *Nicolaus* noſter poſtquam tertium fere annum Bernae transegerat, Baſileam rediit et mox compoſitis ad abitum rebus ſe vna cum *Daniele* fratre in viam dedit VIII. Kal. Septembr. Petropolin venit VI. Kal. Nouemb. A. clɔlɔ ccxxv.

Hic primum valetudine ſic ſatis ſecunda vſus eſt, ſeque totum ad ſubtiliſſimam matheſin, cui a pueritia adſuetus erat, contulit, Praeſidi noſtro inprimis carus, fratri, vt diximus, omni ſtudio coniunctus, collegis integritate amicitiae ſuauis atque vtilis, omnibus candore pariter et humanitate commendatiſſimus; vt nihil homini hoc ingenio ac fortuna ad beate viuendum deeſſe videretur. Sed quid eſſe poteſt in hac vitae inconſtantia diu? Poſt octo admodum menſes febre lenta, quae principio minus periculoſa credebatur, correptus, deinde afflictus etiam et oppreſſus VI. Calend. Aug. clɔlɔccxxvI. moribundo ſimilis iacuit, et quamquam remittebat dolor, tamen viribus iam minutis atque exhauſtis biduo, poſt hora tertia matutina mentis et rationis ad extremum compos exanimatus eſt.

Iam ſeptimo ante obitum die, cum mortem imminentem praeuideret nec fratri diſſimulare poſſet, epiſtolas nonnullas, quas ſibi ſuperſtites nolebat, combuſſit. Corporis anatome vomicam inteſtini manifeſtauit, quae nulla humana ope ſanari poterat. Ingenii ſui monumenta tum in actis Lipſienſibus noſtrisque commentariis, tum

tum vero magnam partem in ſcriptis, quae a *Daniele* conſeruantur, reliquit. Funus *CATHARINA AVGVSTA* ſuo ſumtu efferri iuſſit et cum in Academiam veniſſet, vocato ad ſe defuncti fratre, ſui luctus ſimul et clementiae (quae vna erat in hac calamitate maxima conſolatio) indicium dedit.

Sed quo animo exiſtimemus patrem fuiſſe, cum nuncium acciperet de morte filii, quem tanta cura educauerat, in quem tantum contulerat ſuae doctrinae ſuarumque virtutum, in quo, vt paucis dicam, nihil inueniebatur, quod Bernoulliano nomine dignum non eſſet. Quis iuſtum neget ex tam improuiſo, tam acerbo, tam alte adacto vulnere dolorem? quem ſi vlla res lenire vel minuere poteſt, ſuperſtitum certe filiorum in patris veſtigia ſuccedentium magna indoles et praeclara inſtitutio mitigabit. Inter omnes qui aliquod inſigne nomen in matheſi, noſtra memoria, adepti ſunt, pauci filios reliquerunt eadem diſciplina perfecte eruditos, *Iohanni Bernoullio* prope dicam ſoli contigit, vt aetatem ingraueſcentem filiorum ſuorum meritis partim iam confirmatis et in luce poſitis, partim adhuc in ſummam ſpem adoleſcentibus ſolari poſſet, qui tam proſperi euentus quando non obſcure etiam ad collegium noſtrum pertinent fructumque nobis ampliſſimum promittunt, vehementer cupimus atque exoptamus, vt vir praeſtans virtutis ac ſcientiae gloria, depoſito filii luctu, tantis bonis praeſentibus quam diutiſſime perfruatur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

PETROPOLI

FACTAE.

CONTINUATA RELATIO ECLIPSIUM SATELLITUM IOVIALIUM PETROPOLI OBSERVATARUM

a

D. I. N. DeL'Isle.

A. 1728.	N.St. Die	H.	′	″	
Sept.	8	16	34	30	Immerſio primi. Intra pauca ſcrupula ſecunda tubis 13 et 15 pedumobſervata.
	17	12	57	36	Immerſio primi. Intra 15″ dubia propter nubes raras, tubo 13 pedum. Tempus vero unico horologio conſtat.
Octob.	1	16	53	16	Immerſio primi bona obſervatio tubo 15 pedum.
	3	11	21	56	Immerſio primi exacta, tubis 13 et 15 pedum.
	7	13	3		Immerſio quarti } tubis
		15	5		Emerſio quarti } 13 et 15 pedum. Ultra ſcrupula prima nil licuit definire amplius propter ob-

	N.St.	Tempus verum.			
					obſervationis incertitudinem lento ſatellitis motui et obliquitati incidentiae imputandam.
1728	Die	H.	'	"	
Octob.	8	12	23	45	Immerſio tertii tubo 13 pedum.
		14	58	51	Emerſio tertii tubo 13 pedum.
	10	13	17	23	Immerſio primi tubo 15 pedum bene obſervata.
Nov.	2	13	30	43	Immerſio primi tubo 13 pedum exacte
Dec.	2	15	28	41	Immerſio primi tubo 15 pedum, dubia intra aliquot ſecunda.
	4	9	57	2	Immerſio primi tubo 15 pedum.
	11	11	46	5	Immerſio primi tubo 13 pedum, dubia intra pluſcula ſecunda. Tempus item verum uno horologio tantum definitum eſt.
	14	14	24	30	Immerſio ſecundi aliquot ſecundis dubia, tubo 22½ pedum: tempus verum

	N.St.	Tempus verum.			
1728	Die				rum uno horologio conſtat.
Dec.		H.	′	″	
	18	13	36	30	Immerſio prim. tubo 15 pedum. Satelles Iovi quam proximus fuit. Tempus vero uno conſtat horologio.
1729 Ianuar.	8	14	6	3	Emerſio ſecundi paucis ſecundis dubia tubo 22½ p.
Febr.	13	6	51	37	Emerſio primi tubo 15 pedum. Satis bene.
	27	8	26	42	Emerſio ſecundi tubo 13. pedum. Mediocriter.
Mart.	6	11	5	55	Emerſio ſecundi tubo 15 pedum.
		12	39	52	Emerſio primi tubis 13 et 15 pedum.
	7	6	33	7	Immerſio } quarti. tubo
		10	14	15	Emerſio } 15 pedum.
	31	7	30	11	Emerſio primi. Tubo 15 pedum. Tempus verum duobus horologiis definitum eſt.
April.	7	11	7	25	Emerſio ſecundi. Tubo 15. pedum.

		H.	′	″	
1729 April.	14	11	24	12	Emerſio primi aliquot ſecundis dubia. tubo 13. p.
	30	9	46	9	Emerſio primi. tubo 15 pedum. Celo ſereno.
Maii.	4	11	6	2	Emerſio tertii tubis 13 et 15 pedum.

Plerasque harum obſervationum tutas praeſtiti ab errore qui nonnunquam ex eo oriri poteſt, ſi non niſi unico horologio tempus verum definitur. Licet enim iſtud motui ſolis duobus illis meridiebus, quas obſervatio intercedit, exacte comparatum fuerit, errori nihilominus locus eſt ſi motus horologii non ſit uniformis. Remedio fuerunt quatuor horologia poſtremae hac Iovis apparitione uſurpata, quae ſibi ipſis ſemper comparavi ſtatim poſt tranſitum Solis in linea mea meridiana capillari, itemque mox poſt alias quascunque ſive diurnas ſiue nocturnas obſervationes, ſi quidem veri temporis exactam poſtularunt notitiam. Non ſine voluptate expertus ſum ſaepius, quod tempus verum ex ſingulis horologiis deductum idem prorſus provenerit. Quandoque tria conſpirarunt horologia, quartum aliquot ſecundis differebat, quod, ſi ſolum adfuiſſet errorem ita peperiſſet. Obſervationes quarum tempora vera non niſi unico aut duobus horologiis potuerunt definiri notatae ſunt a latere praecedentis catalogi. Ubi nihil notatum eſt, ibi ſubintelligere oportet quod eiusmodi obſervatio tempus ſuum verum ex quatuor aut tribus horologiis conſentientibus habeat.

OB-

OBSERVATIONES ALTITUDINIS POLI IN *OBSERVATORIO IMPERIALI* QUOD PETROPOLI EST HABITAE

a

D. I. N. DeL'Isle.

AB eo tempore quo in hanc urbem venimus, polarem eius altitudinem certo determinare, refractionesque ibi indagare ſtuduimus.

Pro altitudine poli omnes obſervavimus ſolis meridianas altitudines quas caelum permiſit; quadrante ab initio uſi ſumus 18 pollicum in radio, quem ex Gallia attulimus.

Ab 11. Martii, anni 1726. novi ſtili (qui ſextus dies fuit poſt adventum noſtrum in hanc urbem) usque ad 2. Aprilis anni 1727, hoc inſtrumento ultra 150. cepimus meridianas ſolis altitudines; Plurimas fixarum ſtellarum altitudines meridianas tam boreales quam auſtrales nunc non recenſemus.

Pro refractionibus obſervauimus anno 1726 et ab initio anni 1727 quam plurimas ſolis altitudines matutinas

tinas aeque ac veſpertinas diebus pluribus continue captas, ab horizonte duodecimum usque gradum, menſe Iunio pro refractionibus aeſtivis, menſibus autem Novembre, Decembre, Ianuario et Februario pro hibernis refractionibus obſervatum eſt.

Cum vero Frater meus non multum poſt aequinoctium vernum anni 1727 Aulae iuſſu Archangelopolim et Kolam mitteretur easdem ut ibi faceret obſervationes, atque ſecum quadrantem, cuius radius 18 pollicum eſt, auferret, coepi ſub ipſum ſolſtitium aeſtivum huius anni 1727 quadrantem, cuius radius trium eſt pedum, uſurpare, eoque altitudines ſolis meridianas, ordine non interrupto, obſervavi a 12 Iunii ad praeſens usque tempus, ſumma qua potui diligentia, eaque exactitudine, cuius inſtrumenti magnitudo capax eſt, eo fine ut poſtea poli altitudo pro hac urbe certius elici poſſit.

Pro refractionibus, hoc quoque inſtrumento novas obſervationes inſtitui, magnumque numerum altitudinum extra meridiem diebus pluribus continuis menſe Iunio anni 1728 captas acquiſivi; poſtquam ex obſervationibus integri anni hic quadrans mihi omnino perſpectus erat.

In poſtremis hiſce obſervationibus refractionum gratia habitis, quatuor horologiis oſcillatoriis uſus ſum, quae mihi eo profuerunt, ut certitudo maior fuerit de motibus eorum regularitate, quam quidem ſupponere opus eſt in calculo pro refractionibus methodo mihi uſitata inſtituto.

Eo-

Eodem quadrante obſervavi quoque ſub finem anni 1728, et initio anni ſequentis utramque ſtellae polaris altitudinem meridianam, quod quidem hucusque facere non poteram ob diverſa impedimenta.

Hae ſunt obſervationes omnes poſteriori hoc inſtrumento factae, quas nunc recenſebo tanquam magis idoneas ad poli altitudinem certius definiendam in obſervatorio imperiali, in quo hae omnes poſtremae obſervationes habitae ſunt.

I.

Deſcriptio maioris Quadrantis methodique quo uſus ſum in eo verificando

QUadrans trium pedum in radio, quo uſus ſum poſt Fratris mei abitum hucusque, Londini fabrefactus eſt a I. Rowley, ad modum ſextantis cuius deſcriptionem et delineationem dedit Flamſtedius in tertia parte Hiſtoriae ſuae coeleſtis non ita pridem in publicum emiſſae.

Praeter tubum alterutri laterum quadrantis affixum, alter circa centrum quadrantis mobilis aderat. Mobilis tubus inſerviebat altitudinibus aſtrorum capiendis, poſito prius inſtrumento in ſitum verticalem ope perpendiculi ex centro per diviſionis initium pendentis. Sic tubus mobilis ad aſtri obſervandi altitudinem dirigebatur; Poterat autem tubus admodum lente moveri ope cochleae perennis dentibus inſertae qui extremitati limbi inciſi ſunt.

Limbo nulli linearum ductus inſculpti fuerunt praeter transverſales decem minutorum intervallis a ſe invicem diſtantes, eorum vero ſubdiviſio in ſingula minuta extabat in parva regula, ſive linea fiduciae quae mobilis erat una cum tubo.

Poterant quoque ſubdiviſiones transverſalium haberi per circuitus cochleae perennis; Verum, quia conſtructio talis mihi nimis compoſita, minusque exacta viſa eſt, ſubſtuli tubum mobilem resque ceteras ad eum pertinentes, uſurus ſolo tubo lateri quadrantis affixo, haerente in averſo quadrantis plano.

Neceſſe fuit ob hanc cauſam ductus transverſales ipſos in ſingula minuta prima ſubdividere per circulos concentricos. D. Vignon in ſe ſuſcepit opus; ſuſtulit apparatum priorem quo centrum quadrantis inſtruebatur, et ſubſtituit laminam latam orichalceam plano quadrantis affixam. In ea centrum notavit, ex quo circulos concentricos duxit radiis debitis, quibus ſubdiviſio in ſingula minuta abſolvitur. Quod attinet perpendiculi ſuſpenſionem, eam tam ſubtilem reddidimus quam potuimus, namque centro inſtrumenti adaptavimus mucronem tenuiſſimae acus, quem circumdedit annulo ſatis amplo capillus, qui pondus cui pareſt ferendo, appenſum habet.

Tubus quadratus adeſt, quo perpendiculum includitur et a vento tuetur. Quin et ad aeſtimandas quam exactiſſime minutorum ſubdiviſiones in qualibet obſervatione, lens adhibetur in regione capilli quae notabiliter amplificat.

Ante-

Antequam hoc inſtrumentum ad obſervationes adhibuimus, ſumma diligentia verificavimus per plures dies continuos ſitum tubi fixi quem habet reſpectu diviſionis; idque methodo inverſionis a D. Picarto demonſtrata in tractatu ſuo de menſura terrae, et poſt hunc, a D. de la Hire ubi agit de uſu ſuarum tabularum aſtronomicarum.

Poſthaec 6 vel 7 notas in obiecto diſſito elegimus, ad quas direximus quadrantem eadem die et hora, qua eius errores per inverſionem deteximus, unde verum notarum ſitum reſpectu obſervatorii definivimus. Atque ſic in poſterum nil amplius requirebatur pro quadrantis examinatione quam ut eum ad notas correctorias dirigeremus, quod quidem ſemper facimus paulo ante quamcunque altitudinis obſervationem habendam aut mox poſt habitam; hoc medio quadrantis error innoteſcit, quem obſervationis tempore habet.

Quam ita examinando quadranti impendimus curam, ea inutilis non fuit; Nam cognovimus quod quandoque tubus nihilominus luxatus fuerit, licet omnem adhibuerimus diligentiam ut caute et circumſpecte tractaretur, hoc eſt, ne tubus tangeretur. Verum hoc obſervationibus nil obeſt, quia, veluti iam diximus, quantitatem emotionis tubi deprehendimus quoties obſervatio habetur.

II.

Altitudines meridianae ſtellae polaris neglecto quadrantis errore.

Altitudines polo altiores veſperi captae.

A. 1728. N. St.		°	′	″
Nov.	29	61	42	30
Dec.	1	61	42	35
	3	61	42	35
	4	61	42	40
	14	61	47	0
	18	61	47	20
	19	61	46	15
	22	61	46	10
	23	61	46	15
	24	61	46	10
A. 1729	28	61	46	15
Ianuar.	8	61	46	20

Altitudines polo humiliores mane captae.

A. 1728. N. St.		°	′	″
Nov.	30	57	25	0
Dec.	1	57	25	0
	4	57	25	0
	19	57	30	0
	20	57	28	40
	23	57	28	35
	24	57	28	40
	25	57	28	40

Ex hiſce apparet obſervationibus 1, quod quadrans a 29 Novembris ad 4 Decembris nulli ſenſibili mutationi obnoxius fuerit. Maxima tum altitudo fuit 61°. 42′. 35″, et minima 57°, 25′.0″. quo diameter paralleli ſtellae polaris apparens concluditur eſſe 4°. 17′.35.

2. A 19. Decembris veſpere ad finem usque obſervationum quadrans itidem ſenſibiliter mutatus non fuit. Maxima tum altitudo fuit 61°. 46′. 15″. minima ve-

ro

ro 57°, 28′. 40″, quo denuo diameter apparens paralleli ſtellae polaris conficitur eſſe 4°, 17′. 35″. Quanquam itaque quadrans, interea dum binae hae obſervationum ſeries inſtitutae fuerunt immutatus fuerit minutis 3′ 40″, apparens tamen polaris paralleli diameter certo ſcitur, qualis a diviſione quadrantis exhibetur.

III.

Errores Quadrantis cum obſervarentur ſtellae polaris altitudines.

QUoniam altitudines ſtellae polaris noctu captae ſunt, non potuit quadrans ad notas dirigi eo tempore quo obſervatio facta eſt. Verum quia quadrans ſenſibilem mutationem per plures dies paſſus non eſt, pro erroribus veris ii haberi poſſunt qui obſervati ſunt quovis meridie obſervationem polarem antecedente vel ſequente.

Hi ſunt autem quadrantis errores quos hiſce meridiebus invenimus, ſumendo medium eorum quae quolibet meridie ex ſex illis vel ſeptem notis deprehenſa fuere.

Error quadrantis additivus.

	ſub meridiem			ſub meridiem	
	′	″		′	″
A. 1728. Nov: St. n. 29	23	25	A. 1728. Dec. St. n. 14	18	25
30	22	55	19	18	55
Dec. 1	22	50	22	19	15
2	23	10	23	19	10
3	22	40	24	19	15
			25	19	35

Sunt hic errores qui differunt inter ſe, qui tamen differre non debebant, cum notum ſit ex prioribus obſervationibus quadrantem tum immutatum manſiſſe. Verum maxima harum differentiarum pars provenit a variationibus, quibus, uti notum eſt, obnoxiae ſunt refractiones horizontales, et quae horizonti ſunt vicinae. Non multum autem errabiturſi medium eorum arithmeticum ſumatur.

Pro prima igitur obſervationum ſerie, hoc eſt pro iis, quae ab 29 Novembris usqne ad 4. Decembris factae ſunt, quadrantis error eſt 23′ 0″. Pro altera vero ſerie obſervationum quae ab 19 Decembris veſperi ad finem usque factae ſunt, habetur error 19′ 20″, qui utrinque additivus eſt, unde maxima altitudo correcta fit 62°, 5′, 35″. minima vero 57°, 48′. 0″.

IV.

De electione alicuius tabulae refractionum.

Methodus qua ad refractiones indagandas utor poli altitudinem cognitam aſſumit, eoque ipſo etiam refractiones. Circulus tamen vitioſus committitur nullus; approximatio potius inſtituitur quam in eiusmodi inquiſitione vitare non licet, non ſecus ac in aliis aſtronomicis problematibus fieri aſſolet.

Coactus igitur refractionibus uti antequam quae regioni huic conveniunt repererim, tabulam eligere debui quae refractiones exacte computatas habeat, ſecundum regulam aliquam geometricam ſimplicem et experientiae ſatis conformem. Hanc ob cauſam aliis omnibus praetuli

tuli quam D. Caſſinus dedit in Commentariis Academ. Pariſ. Anni 1714. pag. 33. editionis Pariſienſis, in qua aſſumit quod quivis lucis radius per athmoſphaeram arcum circularem deſcribat.

Utut veroſimile non eſt curvam radiorum circulum eſſe, attamen, quia curvae quas ad computum refractionum adhibere liceret differentiam attentione multa dignam non inferrent, utar ego ſuppoſitione Caſſiniana tanquam omnium ſimpliciſſima.

V.

Computatio altitudinis poli ex obſervationibus ſtellae polaris.

°	′	″	
62	5	35	Apparens ſtellae altitudo maxima
		31	Refractio ſubtrahenda
62	5	4	Vera altitudo maxima
57	48	0	Apparens ſtellae altitudo minima
		37	Refractio ſubtrahenda
57	47	23	Vera altitudo minima
4	17	41	Vera diameter paralleli ſtellae polaris
2	8	50	Diſtantia ſtellae polaris a polo.
59	56	13	Altitudo poli pro obſervatorio Imperiali Petropolitano.

VI,

VI.

Obſervationes pro ſolis altitudine meridiana ſub ſolſtitio aeſtivo.

NOtum eſt quod circa ſolſtitia ſolis declinatio admodum lente variet, quia etiam quantitas variationis huius nota eſt ex variis ſolis diſtantiis a ſolſtitio, ſequitur inde, quod ex obſervationibus plurium dierum ante et poſt ſolſtitium altitudo ſolſtitialis certius quam ex ſola meridiana altitudine ſolſtitio proxima concludi poſſit.

Obſervationes vero omnes quas comparavi ut ex iis veram altitudinem ſolſtitialem aeſtivam concluderem, ſunt ſequentes.

Die 15. Iunii A. 1727. n. St.

°	′	″	
53	20	20	Altitudo apparens limbi ſolaris ſuperioris
	19	20	Error quadrantis addendus
		44	Refractio
		6	Parallaxis
	15	51	Semidiameter ſolis
53	23	11	Altitudo vera centri ſolaris
	9	14	Declinationis differentia a ſolſtitiali declinatione
53	32	25	Altitudo ſolſtitialis.

Die

Die 18 Iunii 1727.

°	′	″
53	25	45
	20	30
		43
		6
	15	50
53	29	48
	2	49
53	32	37

Die 19 Iunii

°	′	″
53	27	35
	20	20
		43
		6
	15	50
53	31	28
	1	30
53	32	58

Die 20 Iunii

°	′	″
53	28	0
	20	20
		43
		6
	15	50
53	31	53
		35
53	32	28

Die 22 Iunii 1727.

°	′	″
53	26	40
	22	30
		43
		6
	15	50
53	32	43
		1
53	32	44

Die 24 Iunii

°	′	″
53	25	20
	22	30
		43
		6
	15	50
53	31	23
	1	6
53	32	29

Die 25 Iunii

°	′	″
53	24	20
	22	35
		43
		6
	15	50
53	30	28
	2	16
53	32	44

Die 27 Iunii. 1727

°	'	"
53	20	50
	22	25
		44
		6
	15	50
53	26	47
	5	49
53	32	36

D. 11. Iun. 1728

°	'	"
53	6	40
	22	20
		44
		6
	15	51
53	12	31
	20	19
53	32	50

Die 12 Iunii

°	'	"
53	11	45
	21	0
		44
		6
	15	51
53	16	16
	16	27
53	32	43

D. 13. Iunii 1728

°	'	"
53	15	0
	21	10
		44
		6
	15	51
53	19	41
	12	58
53	32	39

D. 14. Iunii

°	'	"
53	17	50
	21	25
		44
		6
	15	51
53	22	46
	9	55
53	32	41

D. 19. Iunii.

°	'	"
53	28	45
	19	30
		43
		6
	15	50
53	31	48
		45
53	32	33

Die

D. 20 Iunii 1728

°	′	″
53	29	30
	19	25
		43
		6
	15	50
53	32	28
		11
53	32	39

D. 21 Iunii

°	′	″
53	30	30
	18	45
		43
		6
	15	50
53	32	48
		0
53	32	48

D. 24. Iunii

°	′	″
53	28	15
	18	45
		43
		6
	15	50
53	30	33
	1	57
53	32	30

D. 25. Iunii 1728

°	′	″
53	26	45
	18	50
		44
		6
	15	50
53	29	7
	3	25
53	32	32

D. 26. Iunii

°	′	″
53	25	15
	18	45
		44
		6
	15	50
53	27	32
	5	18
53	32	50

D. 27. Iunii.

°	′	″
53	22	45
	18	45
		44
		6
	15	50
53	25	2
	7	38
53	32	40

D. 28 Iunii 1728.

°	′	″
53	18	25
	20	30
		44
		6
	15	50
53	22	27
	10	18
53	32	45

D. 29 Iunii.

°	′	″
53	15	0
	20	30
		44
		6
	15	50
53	19	2
	13	23
53	32	25

D. 30. Iunii.

°	′	″
53	11	40
	20	30
		44
		6
	15	50
53	15	42
	16	56
53	32	38

D. 8. Iunii 1729.

°	′	″
52	53	10
	20	10
		45
		6
	15	51
52	56	50
	35	41
53	32	31

D. 15. Iunii.

°	′	″
53	21	20
	20	15
		44
		6
	15	51
53	25	6
	7	53
53	32	59

D. 16. Iunii

°	′	″
53	23	40
	20	10
		44
		6
	15	51
53	27	21
	5	32
53	32	53

Die

D. 17. Iunii 1729.

°	′	″
53	25	25
	20	10
		43
		6
	15	50
53	29	8
	3	36
53	32	44

D. 20. Iunii 1729.

°	′	″
53	28	35
	20	5
		43
		6
	15	50
53	32	13
		17
53	32	30

Medium arithmeticum inter 27. veras altitudines meridianas ſolſtitii aeſtiui tribus hiſce annis repertas eſt 53°. 32′. 40″.

VII.

Obſervationes pro ſolis altitudine meridiana ſub ſolſtitio hiberno.

Die 8 Decembris 1727.

°	′	″
7	23	20
	20	20
	6	54
		10
	16	22
7	20	34
	45	7
6	35	27

D. 11. Dec. 1727.

°	′	″
7	6	30
	20	40
	7	9
		10
	16	22
7	3	49
	27	48
6	36	1

D. 17. Dec. 1727.

°	′	″
6	43	45
	20	45
	7	28
		10
	16	22
6	40	50
	5	38
6	35	12

D. 18 Dec.

°	′	″
6	42	0
	20	50
	7	30
		10
	16	22
6	39	8
	3	35
6	35	33

D 9. Ian 1728.

°	′	″
7	53	25
	21	35
	6	29
		10
	16	18
7	52	23
1	16	40
6	35	43

D. 10. Ian. 1728.

°	′	″
8	2	0
	21	25
	6	23
		10
	16	18
8	0	54
1	25	14
6	35	40

D. 14. Dec.

°	′	″
6	52	35
	18	25
	7	22
		10
	16	22
6	47	26
	11	52
6	35	34

D. 19. Dec.

°	′	″
6	41	25
	18	55
	7	32
		10
	16	22
6	36	36
	1	2
6	35	34

Die

D. 22. Dec. 1728

°	′	″
6	40	30
	19	15
	7	32
		10
	16	23
6	36	0
		11
6	35	49

D.8.Ian.1729.

°	′	″
7	54	0
	19	15
	6	27
		10
	16	23
7	50	35
1	14	51
6	35	44

D. 9. Ian. 1729

°	′	″
8	2	20
	19	15
	6	18
		10
	16	23
7	59	4
1	23	18
6	35	46

D. 10. Ian.

°	′	″
8	11	25
	19	15
	6	10
		10
	16	23
8	8	17
1	32	12
6	36	5

Media inter 12. has altitudines ſolſtitii hiberni meridianas veras duos intra hos annos acquiſitas eſt 6° 35′ 40.

VIII.

VIII.

Altitudo Aequatoris et obliquitas Eclipticae.

°	′	″	
53	32	40	Altitudo ſolſtitii aeſtivi vera
6	35	40	Altitudo ſolſtitii hiberni vera
46	57	0	Diſtantia tropicorum
23	28	30	Obliquitas eclipticae
30	4	10	Altitudo aequatoris
59	55	50	Altitudo Poli Petropolitani in Obſervatorio Imperiali.

Per ſtellam polarem haec altitudo inventa eſt, 59°, 56′ 13″ (§. 5.) differunt igitur inter ſe ſcrupulis ſecundis 23 duae hae poli altitudines duobus diverſis modis erutae, D. Caſſini refractionum tabulas uſurpando ſuae hypotheſi novae ſuperſtractas.

Si altitudinis ſolſtitii hibernalis refractio ſcrupulis 46″ maior quam tabulae Caſſinianae volunt, aſſumta fuiſſet, altitudo Polaris prodiret per altitudines ſolſtitiorum eadem quae per ſtellam polarem inventa fuit, uti ex computu patet ſequenti.

6° 35′

°	′	″	
6	35	40	Altitudo ſolſtitii hiberni (articulo 7.)
		46	Augmentum refractionis ſuppoſitum
6	34	54	Altitudo ſolſtitii hiberni
53	32	40	Altitudo ſolſtitii aeſtivi
46	57	46	Diſtantia tropicorum
23	28	53	Obliquitas eclipticae
30	3	47	Altitudo aequatoris
59	56	13	Altitudo poli per ſolem inventa
59	56	13	Altitudo poli per ſtellam polarem inventa.

Nec ſine ratione ſupponetur refractio ſolſtitii hiberni tribus quadrantibus unius minuti primi maior quam in tabula D. Caſſini habetur. Namque haec augmentatio non ſolum conciliat obſervationes ſtellae polaris et ſolſtitiorum ; ſed et ipſius D. Caſſini obſervationes quas Pariſiis habuit (vid. Comment. Acad. 1714. p. 33.) maiores refractiones produnt (hibernas potiſſimum) quam ſua exhibet tabula ſuae novae hypotheſi innixa.

Hieme ſuperioris anni indicium mihi obtigit notatu dignum , quo refractionis augmentatio circa ſolſtitii altitudinem veriſimilis fit. Sunt nimirum altitudines ſolis meridianae quas exactiſſime obſervavi diebus 23, 24 et 25 Decembris Anni 1728 ; eas in numerum ſupra allatarum non retuli, ob hunc ipſum effectum extraordinarium , ſed ſeorſim eas una cum altitudine ſolſtitiali inde derivata hic recenſeo.

Die 23. Decembris 1728 N. St.

°	′	″	
6	42	0	Altitudo apparens limbi ſolaris ſuperioris
	19	10	Error quadrantis addendus.
	7	31	Refractio
		10	Parallaxis
	16	23	Semidiameter ſolis
6	37	26	Altitudo vera centri ſolaris
		50	Declinationis differentia a ſolſtitiali declinatione
6	36	36	Altitudo ſolſtitialis.

D. 24. Dec.			D. 25. Dec.		
°	′	″	°	′	″
6	43	0	6	44	20
	19	15		19	35
	7	30		7	29
		10			10
	16	23		16	23
6	38	32	6	40	13
	2	1		3	36
6	36	31	6	36	37

Media

Media inter haſce tres altitudo ſolſtitialis eſt 6°, 36′ 35″, quae fere ſcrupulum primum integrum plus habet quam ea quae antea ex duodecim aliis obſervationibus eruta fuit (artic. 7.) Unde apparet quod tribus hiſce diebus refractio obtinuerit uno ſcrupulo maior quam vulgo ſolet. Diſcrimen hoc unius ſcrupuli fere integri obſervationibus erroneis imputari nequit, congruunt enim per tres hoſce dies intra pauca ſcrupula ſecunda, quod exactitudinis certum indicium eſt. Haud vero inutile erit hic monere, quod barometri ſimplicis mercurius tribus hiſce diebus ſummam attigerit altitudinem, quam quidem alioquin per duos hos annos, quolibet meridie altitudinem mercurii notare ſolitus, nondum obſervavi.

Monitum.

CUm D. Prof. *Maierus* p. 185. horum Commentarior. quatuor altitudines meridianas ex his quas modo attuli (*Artic.* 6.) ea intentione adhibuerit, ut exemplo aliquo methodum ſuam de inveniendis ex obſervatione ſolſtitiis commonſtret, easdem vero paulo a meis diverſas attulerit; hinc neceſſarium duximonere, diverſitatem hanc non exinde profectam eſſe, quod diverſo a meo inſtrumento eas obtinuerit, ſed quod hiſce meis obſervationibus correctionem quadrantis applicuerit a mea nonnihil diverſam.

 Dein-

Deinde quod attinet ad veram ſoſtitii aeſtivi altitudinem, quamex quatuor ibi adductis altitudinibus, iuxta ſuam methodum comparatis, 16. ſec. minorem deduxit, quam ego illam inveni medium inter 27. altitudines ſumendo: oritur haec differentia quoad maximam partem ex eo, quod refractionem 13. ſec. maiorem quam ego aſſumpſerit, et praeterea parallaxim ſolis omiſerit; quae poſtea etiam praecipua cauſa fuit, cur elevationem poli Petroburgenſem 23. ſec. maiorem repererit quam ego (art. 8. pag. 513.) Cum inſuper etiam obliquitatem eclipticae tanquam ex aliunde notam ſuppoſuerit in numeris rotundis 23° 29′ quam ego paulo minorem deprehendi ex duabus altitudinibus ſolſtitialibus a me obſervatis et meo more correctis. Verum enim vero de genuina poli elevatione huius urbis nihil ſtatuendum cenſeo, niſi demonſtratis antea refractionibus huic uſui adhibendis; id quod in ſequentem Tomum horum Commentariorum reſervatum eſſe volo.

Erratum.

Pag. 497. lin. 12. pro *quo* lege *qua.*

In primo Tomo.

Pag. 473. lin. antepenult. pro 1727. lege 1726.

Pag 480. lin. 11. pro *maiorum* lege *maiorem.*

lin. vltima 47^h 57′ 30″ lege 47° 57′ 30″.

EMEN-

EMENDANDA.

Cum Autor Diſſertationum quae ſecundo huic Commentariorum Tomo inſertae ſunt, *De Motibus variatis*, et *Conſtructione aequationum Differentialium primi gradus*, alius generis laboribus diſtineretur quando ſchediaſmata haec prelo ſubiiciebantur, impreſſionisque maturatio apprime vrgeretur, vix aliud fieri potuit, quam vt nonnulli errores feſtinantiſſimo calamo ſchedas tranſcribenti exciderent: eorum tamen aliqui Typographis ſunt adſcribendi reliqui autori. Ex hiſce vero omnibus eos hic cum emendationibus annotatos inueniet B. L. qui Autori ſpecimina ſua iam impreſſa curſim relegenti in oculos incurrerunt.

Pag. 148. lin. 10. pro FIKD lege FIKO.

Pag. 152. lin. 3. pro quam vt in fig. 6. lege, quam vt angulus FGB (*fig* 4.) aequalis fiat ang. CBE (*fig*. 6. Ibid. lin. 9. lege $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$ et lin. 10. lege $\frac{(g-bf)zz+bf^3}{bfzz-bf^3} = xx$.

Pag. 154. lin. 3. a fine, lege $-2pdx+2es^n dx = ds$.

Pag. 159. lin. 20. pro AC lege AB.

Pag. 161. lin. 2. pro littera O, ſcribatur vbique G.

Ibid. lin. 11. deletis iis quae poſt haec verba, quantitatem $2dA\sqrt{b}-2dB$, ſequuntur vsque ad finem paragraphi, ſcribatur in eorum locum: vel $2dB-2dA\sqrt{b}$, nam ſigna hisce contraria inde proueniunt, quod creſcente angulo AGB, decreſcant ipſae BG ſeu z. Habetur vero integrando $AGB = 2B-2A\sqrt{b}$. Nam exiſtente

$z=$

$z=f=AG$, fiet $s=o$, adeoque dictae ſummae nulla quantitas conſtans addi debet. Id vero hanc conſtructionem praebet: in recta indefinita AD abſcindantur $AC=h$, et $DC=1$, ductaque normali CF, capiantur in ea $CF=s$, et $CB=\frac{\sqrt{(2fg-2eg)}}{\sqrt{(aa-2fg+2eg)}}$, ductisque AF, AB nec non DF et DB, conſtituatur (*fig.* 10.) ang. *n*AC ad ang. FAC in ratione data $\sqrt{h}$ ad 1. In *fig.* 11. vero fiat ang. AGB=2*ang*. A*n*D, quem DF producta cum A*n* continet, factaque GB= 2*ang*. A*n*D, quem DF duoducta cum A*n* continet, factaque $GB=\frac{f\times(ss+h)}{h\times(ss+1)}$, punctum B erit in *Brachiſtochrona* quaeſita. Angulus vero AGO =2*ang*.ANB (*fig*. 10).

Pag. 162. lin. 16. ſcribatur in margine F*ig*. VIII.

Pag. 163. lin. 7. pro $\int\frac{aalldl}{mpz-a2^{mbl\,2n}}$, ſcribatur

$\int\frac{aalldl}{(mp-a^{2n}hl^{2n})\times(f-z)}$

Ibid. lin. 13. deletis omnibus in paragraph. qui incipit: Sed ſi ſint etc. vsque ad haec verba incluſiue: modo α non ſit $=-2$, in eorum locum ſcribatur: ſi ſint $p=\frac{2abl^{2n}}{m}-\frac{aalL^{1-\alpha}}{\alpha\beta M}$ et $z=f-\beta L^{\alpha}$, exiſtente L quantitate data per *l* et conſtantes, $M=dL:dl$, item α exponente ac β coefficiente datis, fiatque $f=AG$, et $z=AM$ (*fig*. 8). Curua ABO conſtrui poteſt. Fiat enim angulus $AGB=\int\frac{\alpha lMdl}{mL}$, punctum B, erit in *Brachiſtochrona* optata.

Pag. 164. lin. 9. pro EG ſcrib. FG; et lin. 11. pro potentis lege potentias.

Pag.

Pag. 165. lin. 6. a fine pro $\frac{\alpha dp}{p}$, ſcribe $\frac{-\alpha dp}{p}$.

Pag. 166. lin. 3. a fine, pro $\frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ ſcribatur $\frac{2P^{1-2n}dP}{P^{2-2n}}$.

Pag. 167. lin. 5. pro ambo, ſcribe duo priora membra. Lin. 6. praefigatur quantitati $2eg^{n-1}$ ſignum $-$, lin. 7. pro Mdt ſcribatur Mdl. Lin. 9. poſt dM ponatur ſignum $=$, denique lin. 12. ſcrib. inuenientur.

Pag. 169. lin. 14. ſcrib. $\frac{Adq}{dr}$, Lin. 2. a fine, pro CD ſcrib. CB.

Pag. 170. lin. 10. In Denominatore praefigatur quantitati Adx^2 ſignum $+$.

Pag. 172. lin. 5. a fine lege tempuſculo dt.

Pag. 173. lin. 8. pro $dz = rdl$, ſcrib. $dx = rdl$.

Pag. 189. lin. 2. immediate poſt Log. $R = \int(dP: z-P)$, ſcribatur $S = \int(dQ: zR-PR)$, et Pag. 190. lin. 7. pro $+bc$ ſcrib. $-bc$. Lin. 17. deleatur ſignum $=$ inter $\frac{-\frac{1}{2}ndr}{r+1}$, et $\frac{-dr}{r}$.

Pag. 191. lin. vlt. ſcribatur aequatio $(2xx-2Qx+2yy)^{\frac{5}{6}} \times (Q-x)^{-\frac{2}{3}} \times y = (Q-x)^{-1} \times ay$.

Pag. 192. lin. 5. pro 137, ſcribatur 197.

Ibid. lin. 18. proportio elementorum Parabolae dat aequationem $\frac{dy\sqrt{(4y+a)}}{\sqrt{y}} = \frac{ndx\sqrt{(4x+a)}}{\sqrt{x}}$, non autem $dy\sqrt{(4y+a)} = ndx\sqrt{(4x+a)}$, vt ibi per inaduertentiam ſcriptum eſt, nam haec aequatio per ſe integrabilis eſt. Iccirco aſſumta non parabolae proportionaliter diuidendae conueniunt, et hanc ob cauſam ceſſat concluſio quae ibi

ibi appoſita eſt, etiamſi exemplum ipſum aequationi $dy\,V(4y+a)=ndx\,V(4x+a)$ applicatum, methodi bonitatem illuſtrat.

Pag. 195. Methodus conſtruendi aequationem $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+$etc.$=o$, hoc loco indicata ita generaliter ſuccedere non poteſt; quia reſolutio aequationis in ſuos factores ſine certa relatione inter coefficientes locum non habet.

Pag. 72. lin. penult. } pro Percoiwitz, lege Bercowitz
Pag. 73. lin. 4. }

Pag. 73. lin. 8. pro Gran lege Graen

Pag. 76. lin. 5. ſq. in ☾ et ☉ columna ita ponendum

2 Marc	48 Carr.
16 Loth	24 Carr.
1 ʒ	3 Carr.
1 Loth. vel	18 græna
	$4\frac{1}{2}$ græn.
	$2\frac{1}{4}$ græn.
	$1\frac{1}{8}$ græn.
	$\frac{9}{16}$ græn.
	$\frac{9}{32}$ græn.
	$\frac{9}{64}$ græn.

Pag. 68. in margine §. 2. praeponatur Tab. VII.

Pag 177. lin. 14. in marg. pro Fig. VI. leg. Fig IV.

Pag. 474. ſeqq in marg. pro Tab. 28. lege ſemper Tab. 29.

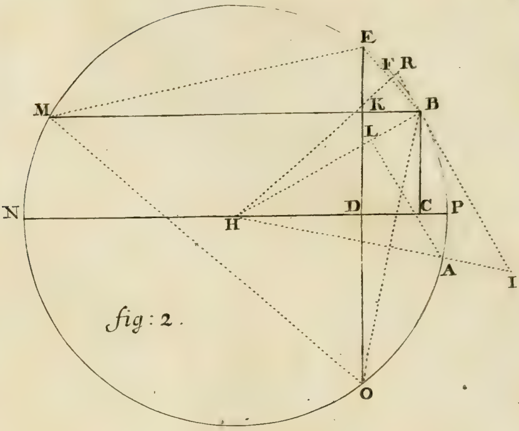


fig: 2.

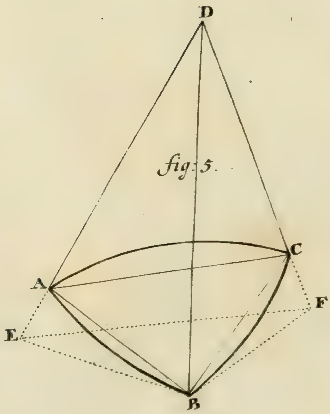
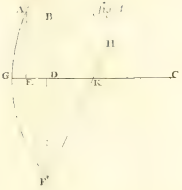
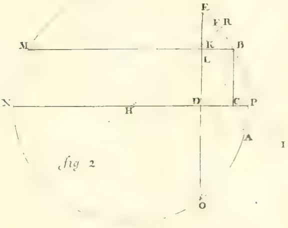
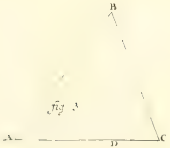
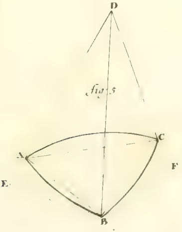


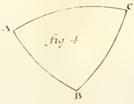
fig: 5.

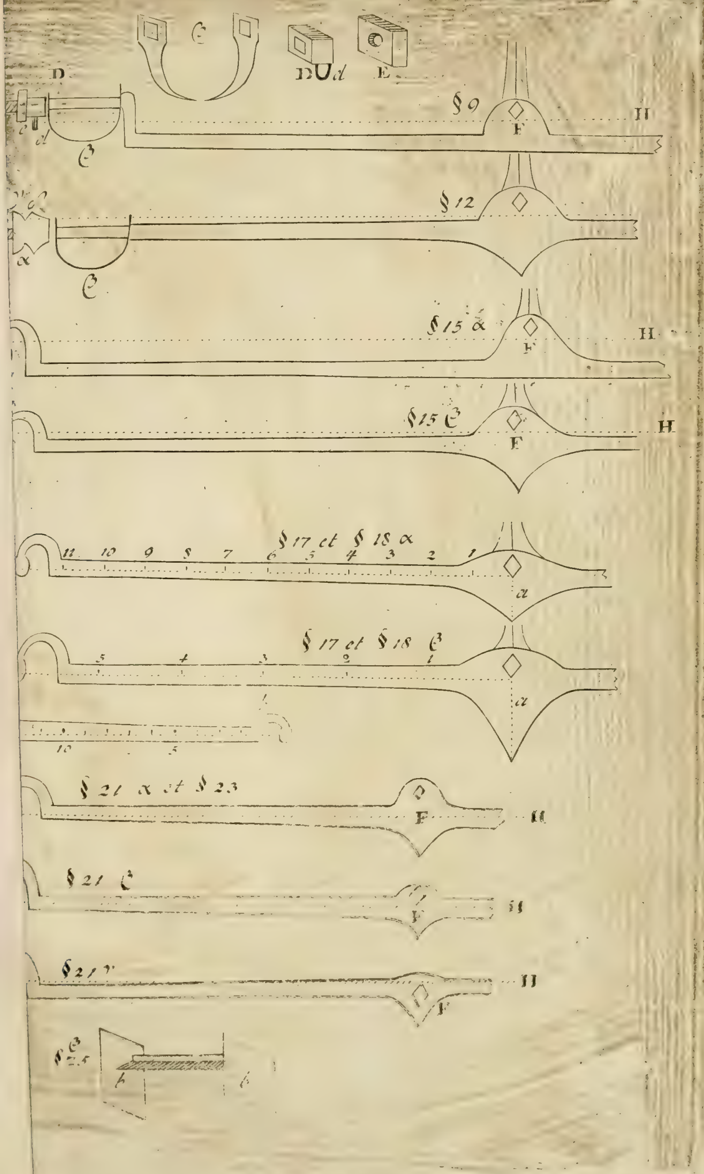

fig 1
A
B
H
G
E
D
K
C
F


E
F R
M
K
B
L
N
D
C
P
H
A
I
fig 2
O
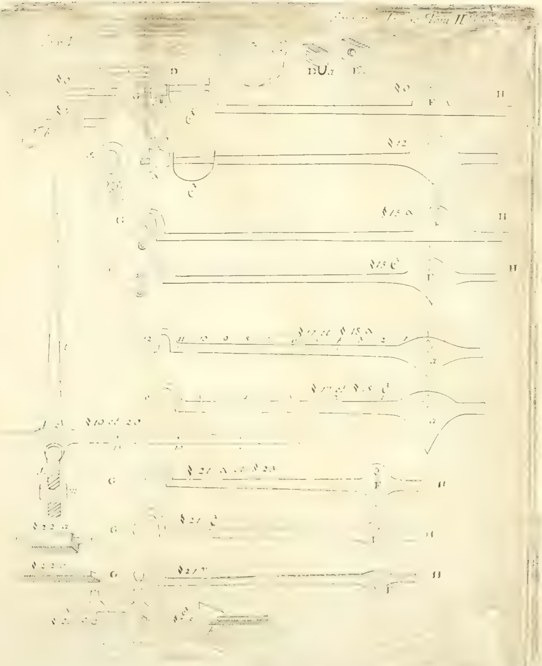

B
fig 3
A
D
C

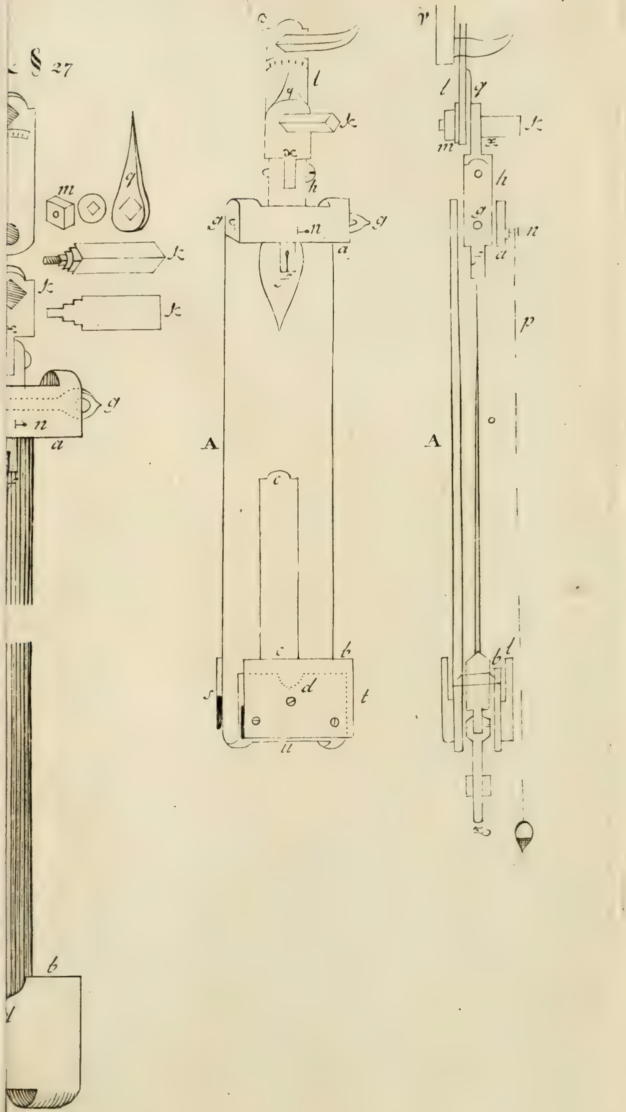

D
fig 5
C
A
F
E
B


A
C
fig 4
B

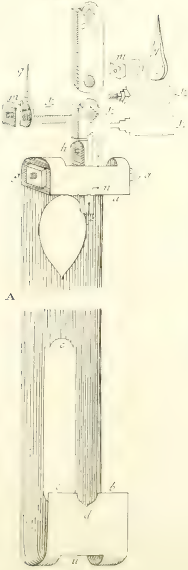


§ 9
§ 12
§ 15 α
§ 15 β
§ 17 et § 18 α
§ 17 et § 18 β
§ 21 α et § 23
§ 21 β
§ 21 γ
§ 25 β

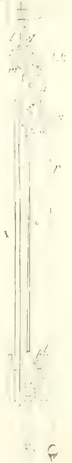



§ 27
m
q
k
k
k
g
n
a
b
l
h
x
A
c
d
s
t
u
v
p
o
z

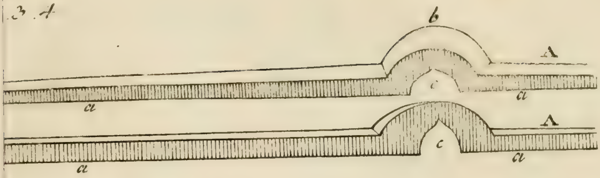
Cap I § 25



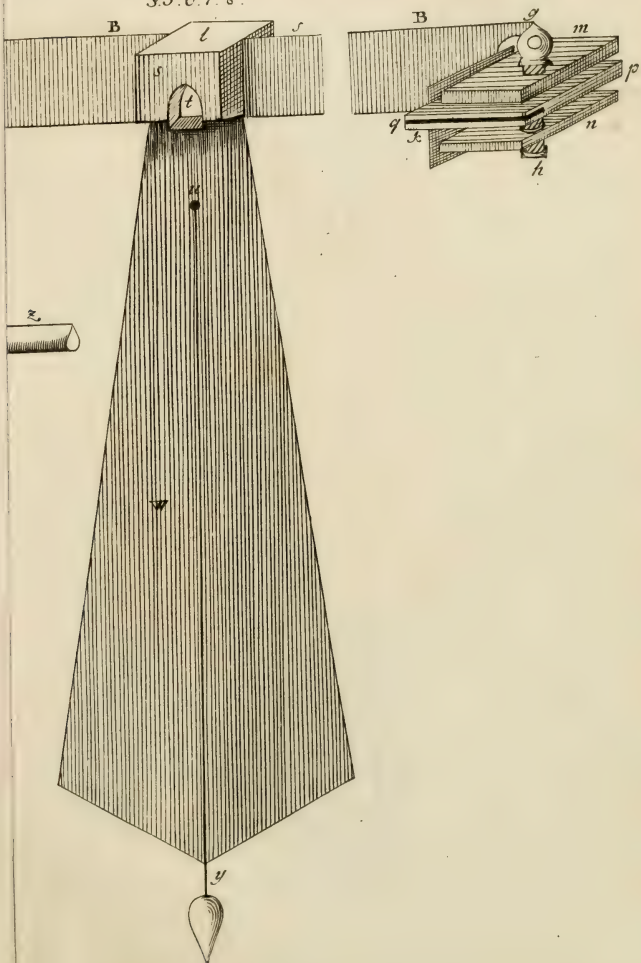


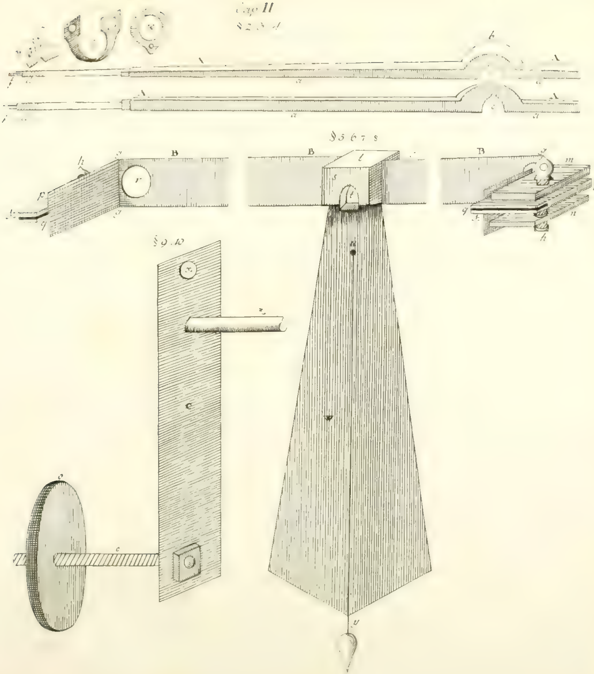


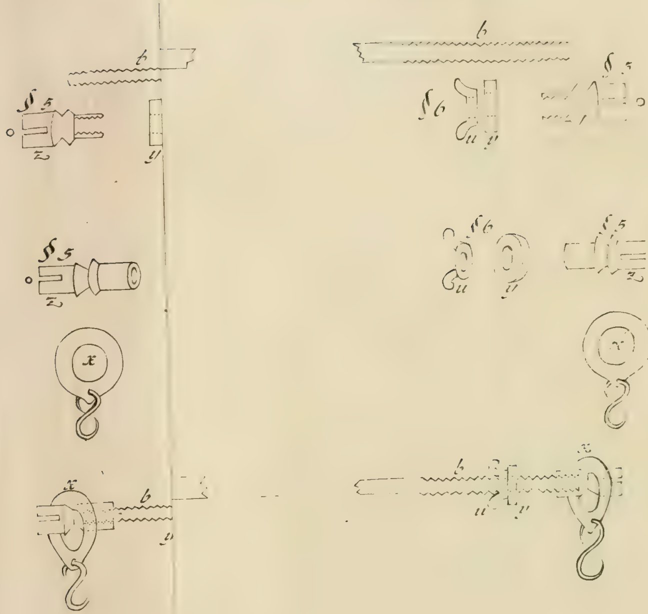
o. II.
.3.4



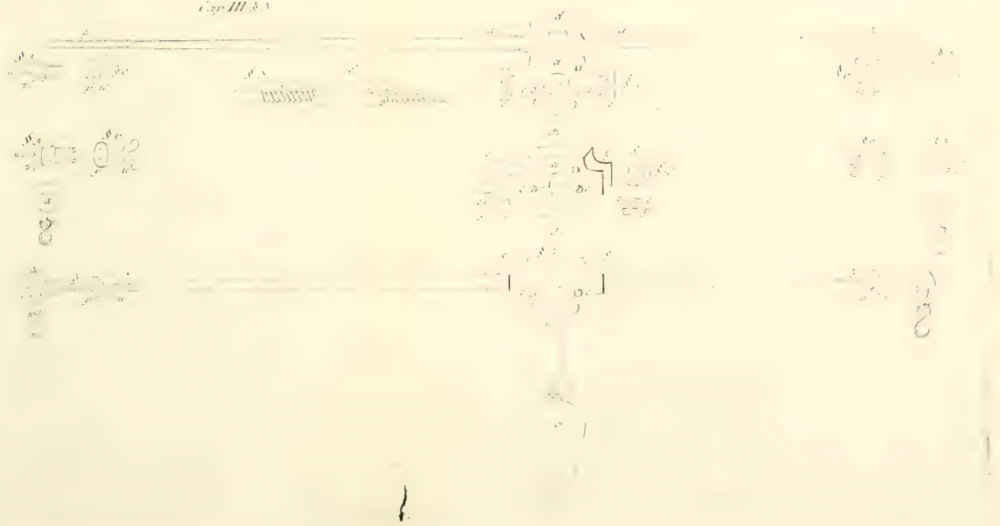
§.5.6.7.8.

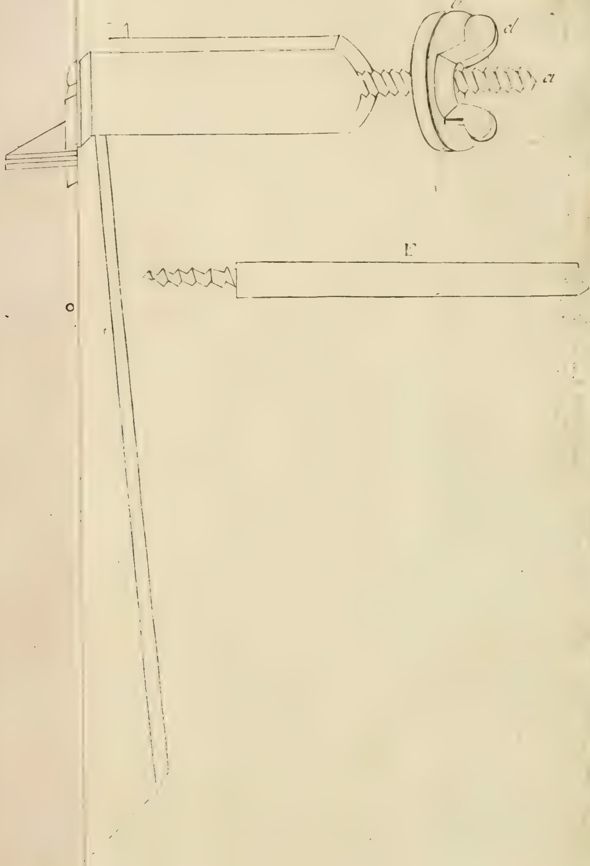


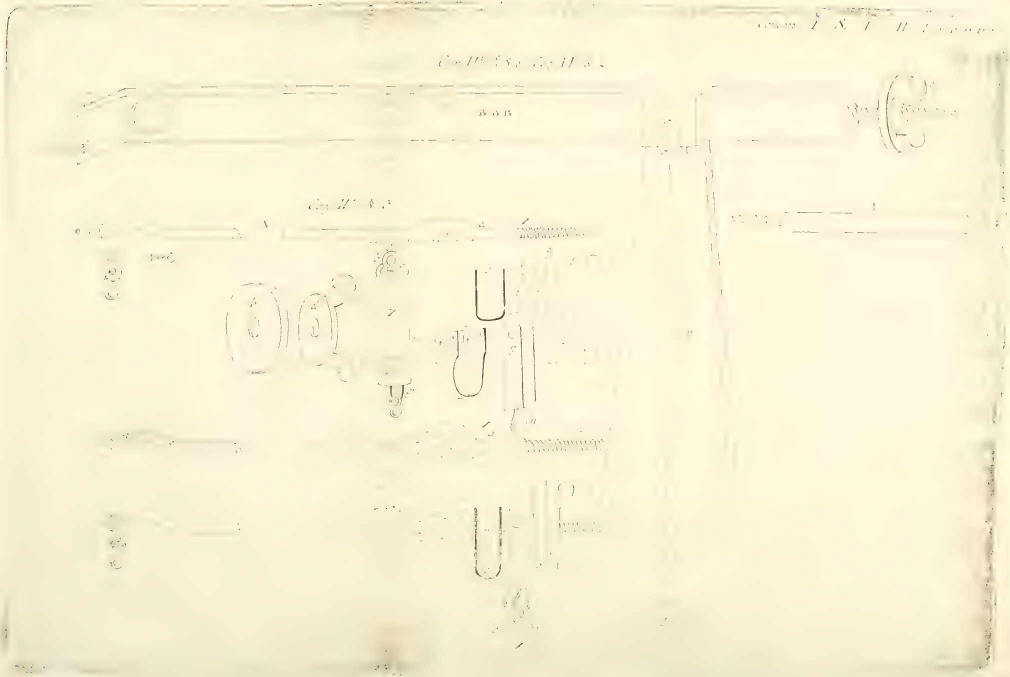

Cap II
§ 2. 3. 4
§ 5 6 7 8
§ 9. 10

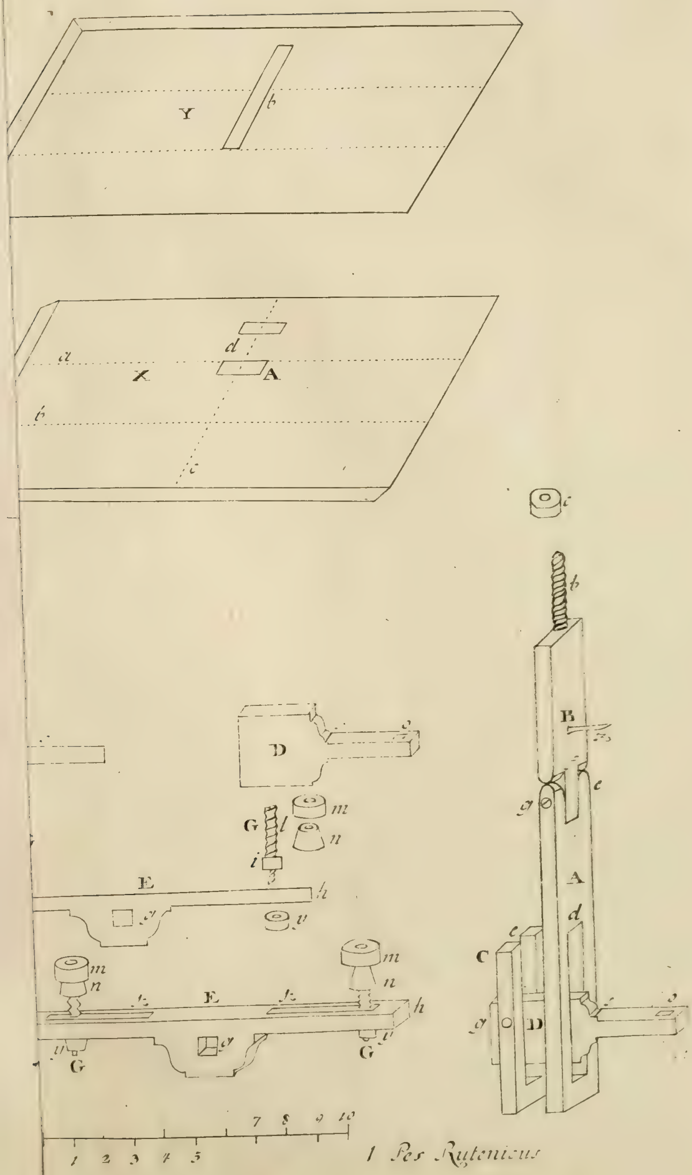

b
§5
z
y
x
§6
u

Cap III § 3



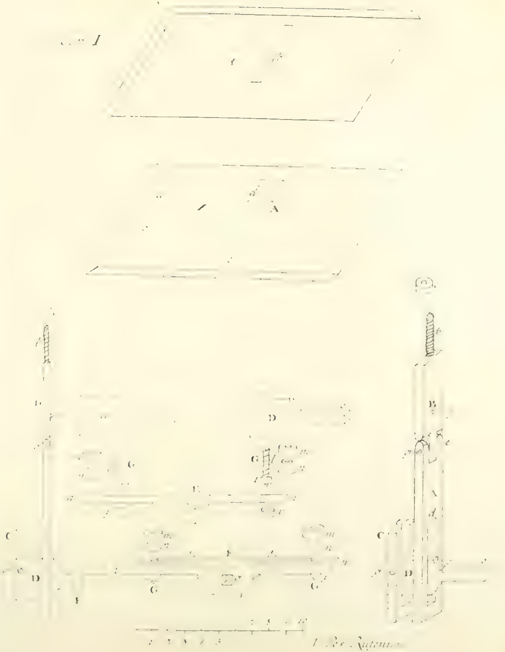

b
d
a
F





Y
b
a
d
X
A
b
c
c
b
B
e
g
A
d
C
e
g
D
D
G
l
m
n
i
E
h
g
v
m
n
m
n
E
h
G
G
v
v
1 2 3 4 5 7 8 9 10
1 Pes Rutenicus

Comm. A. S. Tom. II. Tab. 7 a 70



Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 8. p. 86.

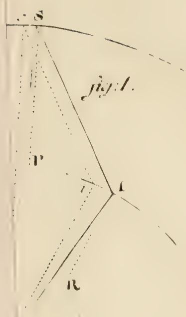


fig: 1.

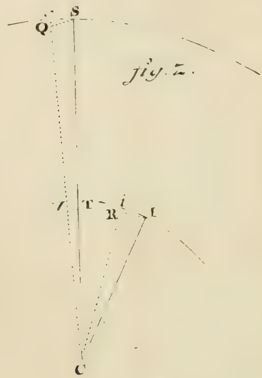


fig. 2.

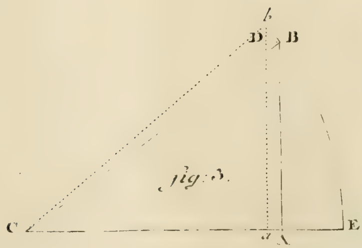
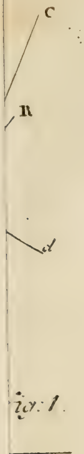


fig: 3.


fig. 1
fig. 2
fig. 3



ig: 1.

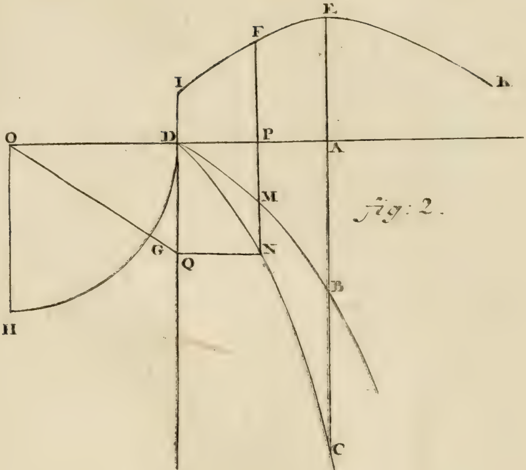


Fig: 2.

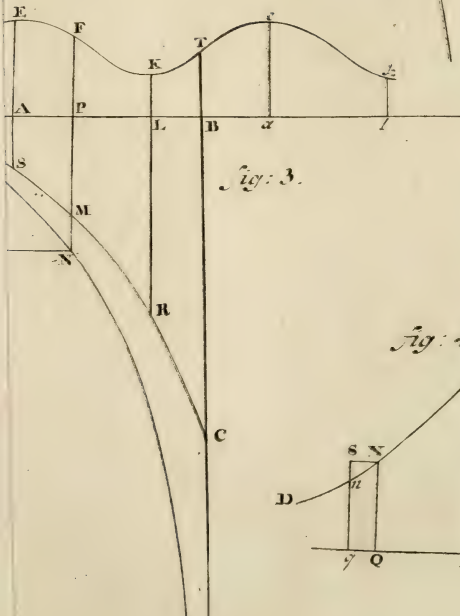


Fig: 3.

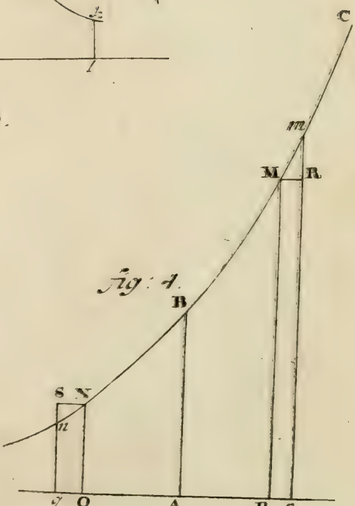
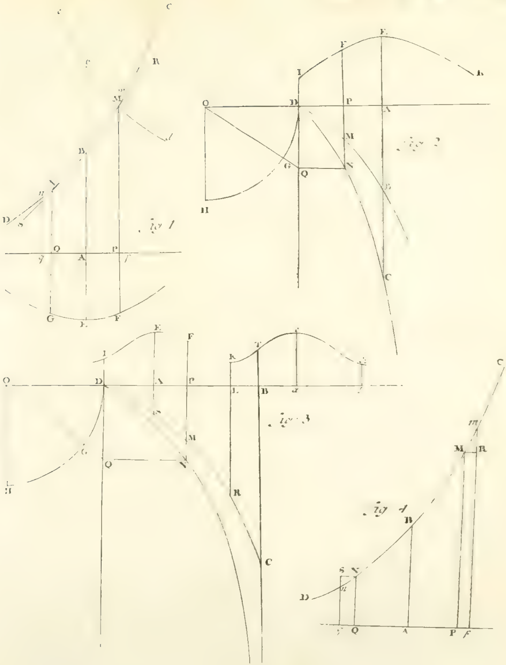
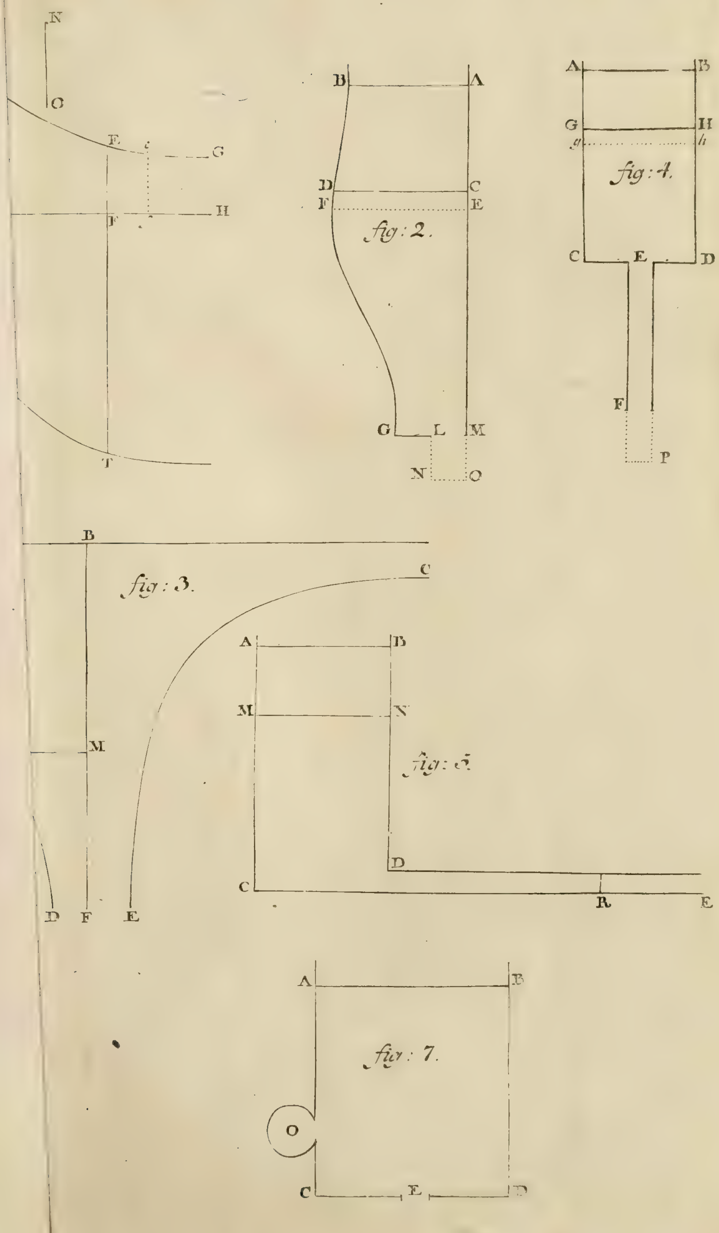


Fig: 4.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4


N
O
E
G
H
F
T
B
A
D
C
F
E
fig: 2.
G
L
M
N
O
A
B
G
H
g
h
fig: 4.
C
E
D
F
P
B
C
fig: 3.
M
D
F
E
A
B
M
N
fig: 5.
D
C
R
E
A
B
fig: 7.
O
C
E
D



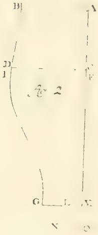


fig. 2

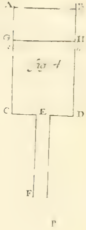


fig. 4

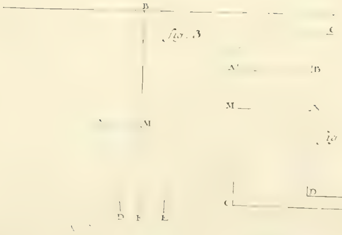


fig. 3

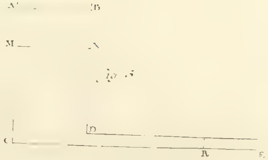
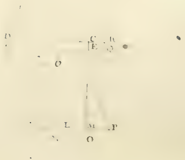


fig. 5



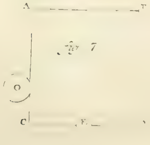
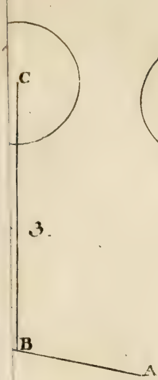


fig. 7



3.

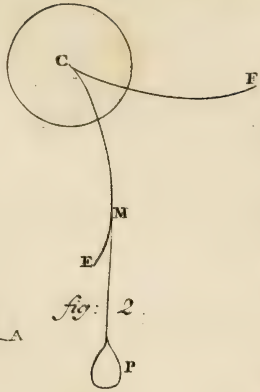


fig: 2.

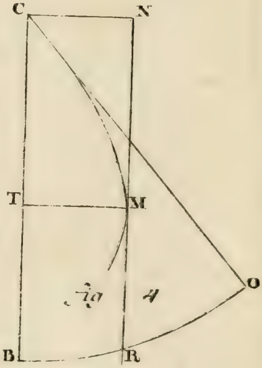


fig 4

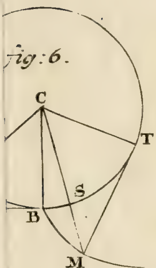


fig: 6.

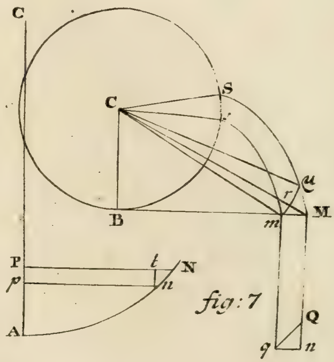


fig: 7

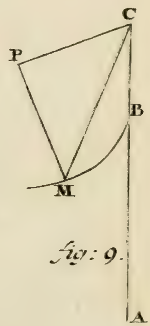


fig: 9.

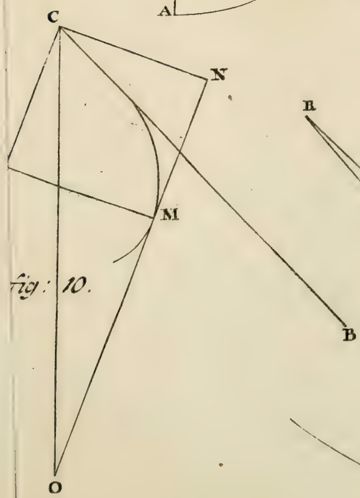


fig: 10.

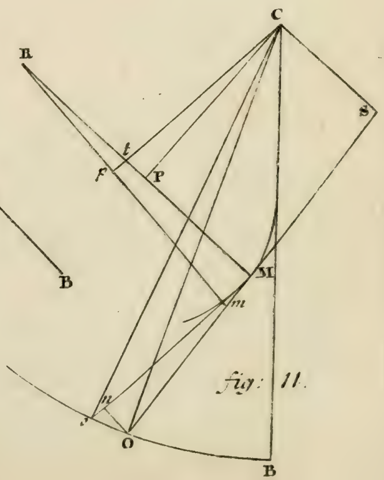
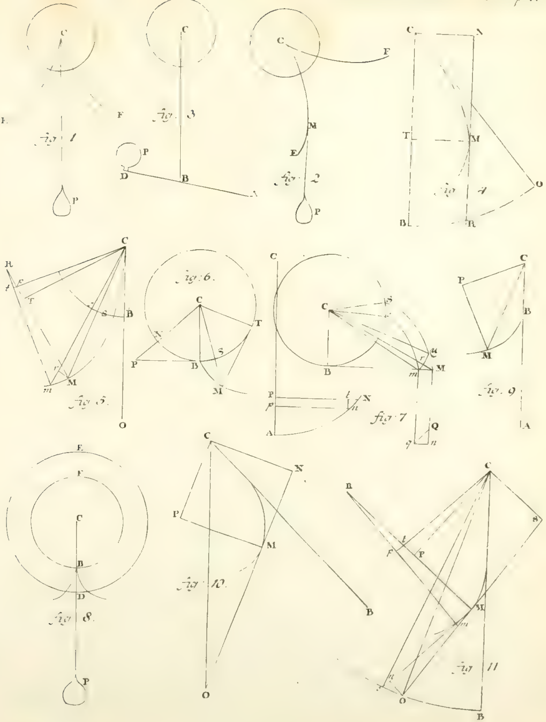


fig: 11.


fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5.
fig. 6.
fig. 7
fig. 8.
fig. 9
fig. 10.
fig. 11

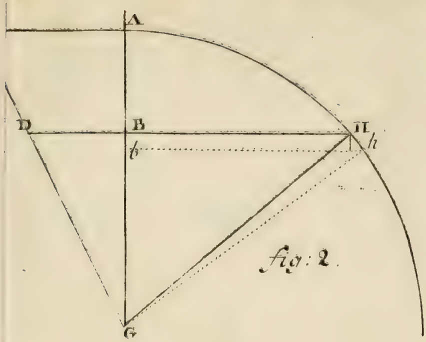


fig: 2.

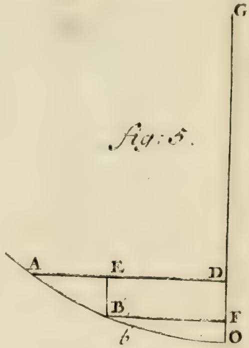
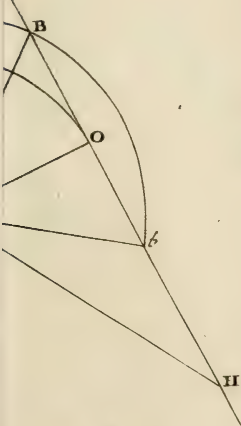


fig: 5.

fig: 3



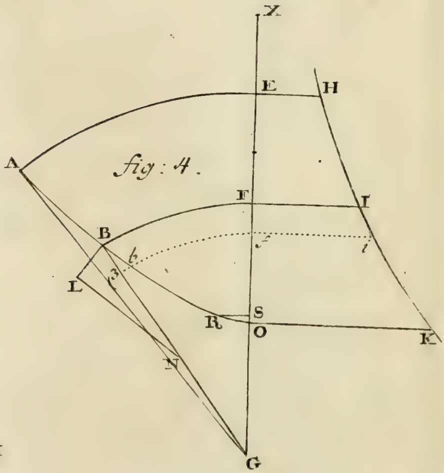
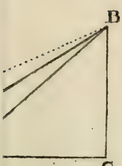


fig: 4.



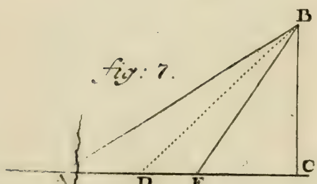
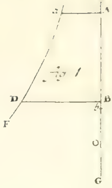
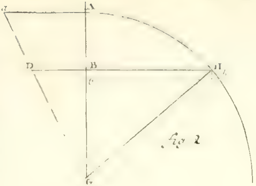
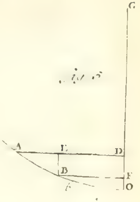
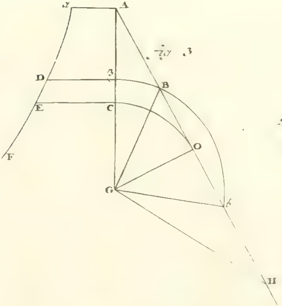


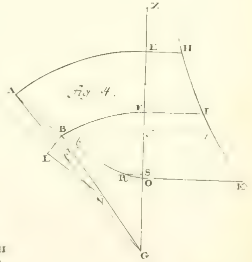
fig: 7.

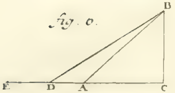

Fig. 1
a
A
D
B
b
F
O
G

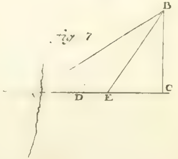

Fig. 2
a
A
D
B
b
H
G

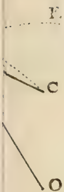

Fig. 5
G
A
E
D
B
F
b
O


Fig. 3
a
A
D
β
B
E
C
O
F
G
b
H


Fig. 4
Z
E
H
A
F
I
B
b
L
S
R
O
K
G


Fig. 6
B
E
D
A
C


Fig. 7
B
C
D
E



9.

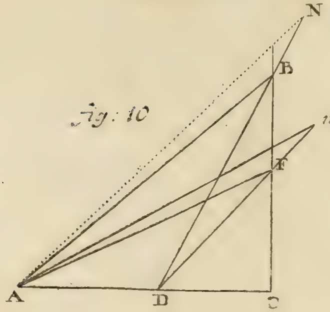


fig: 10

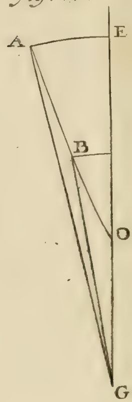


fig: 11.

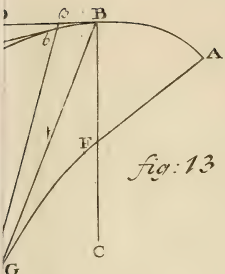


fig: 13

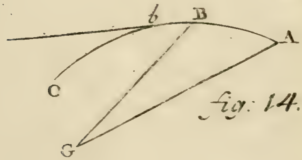


fig: 14.

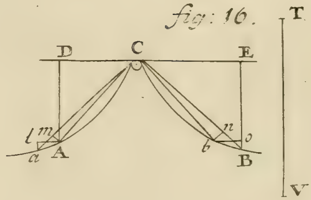


fig: 16.

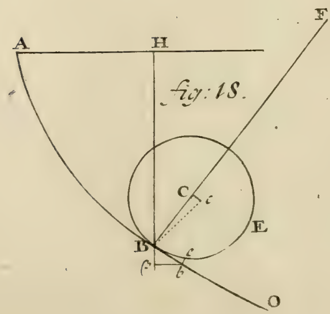
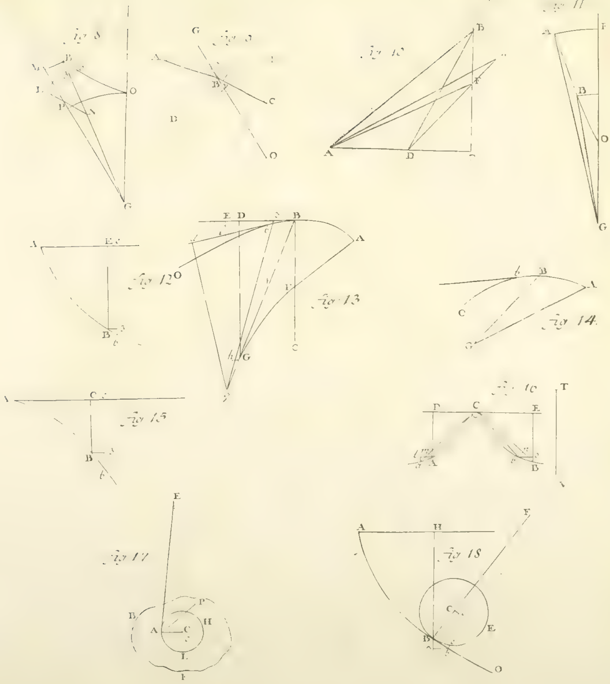


fig: 18.


Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig 12
Fig 13
Fig 14.
Fig 15
Fig 16
Fig 17
Fig 18

Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 14. p. 178.



Fig 3

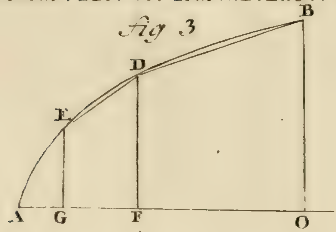


Fig: 1

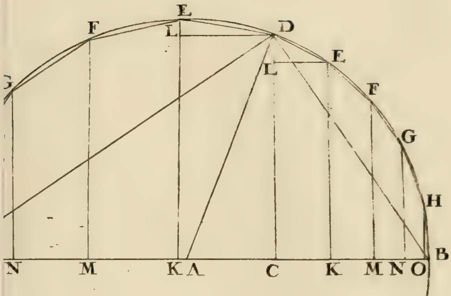


Fig: 4

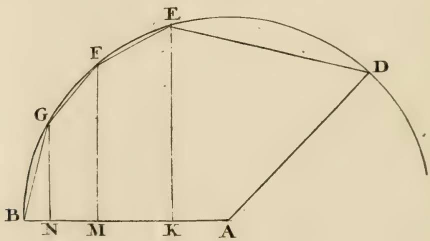


Fig: 6

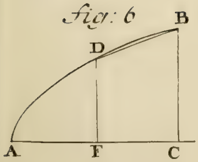


Fig. 2

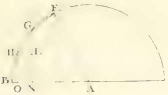


Fig. 3

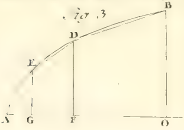


Fig. 1

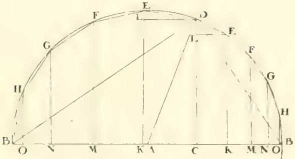


Fig. 5

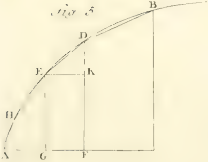


Fig. 4

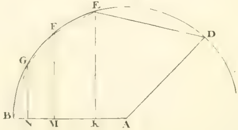
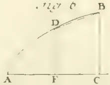


Fig. 6



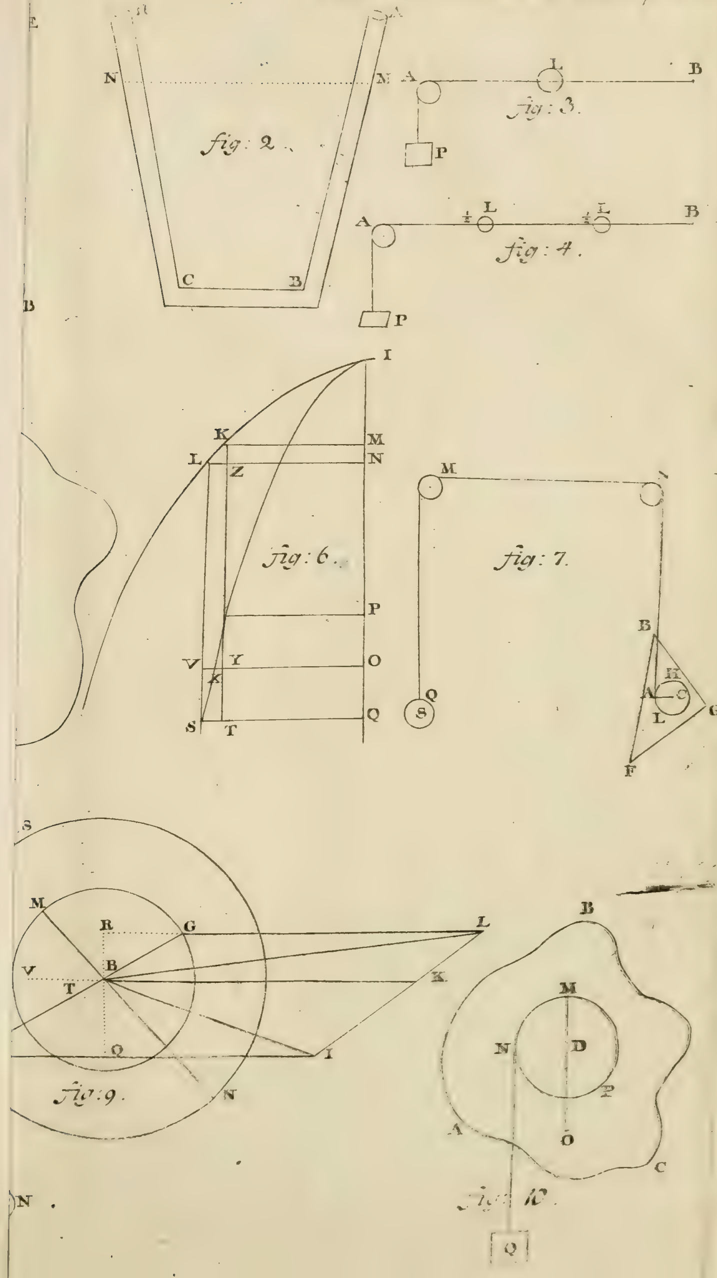
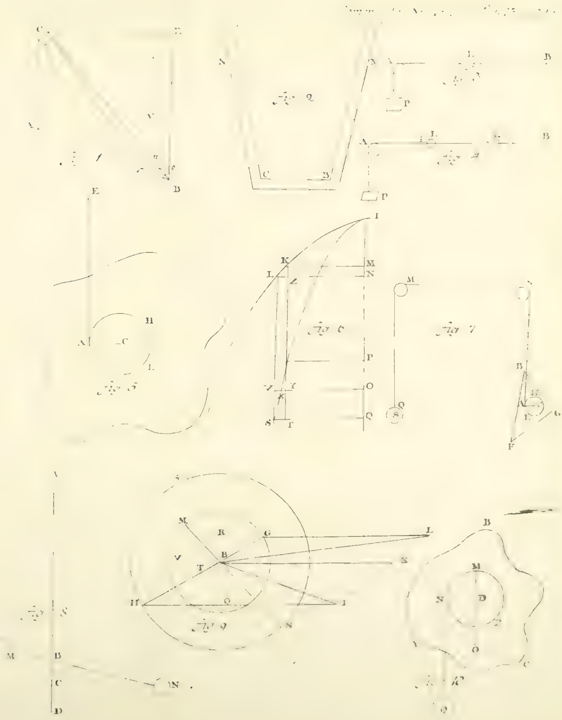
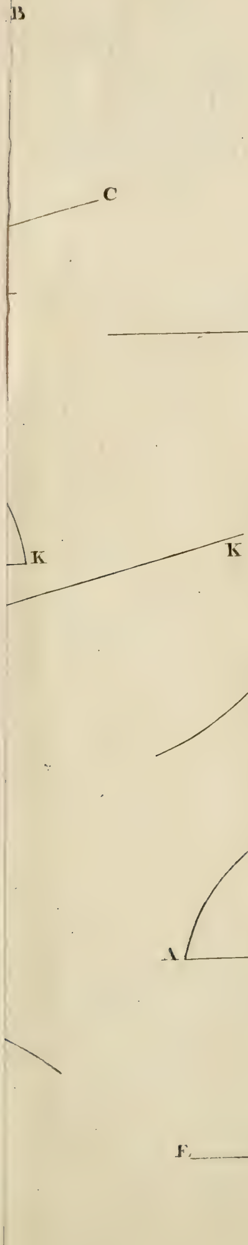


fig: 2.
fig: 3.
fig: 4.
fig: 6.
fig: 7.
fig: 9.
fig: 10.





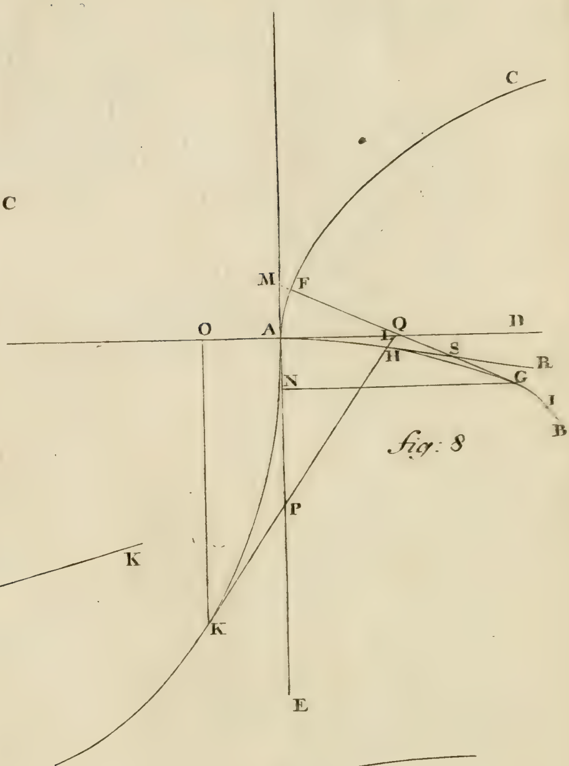


fig: 8

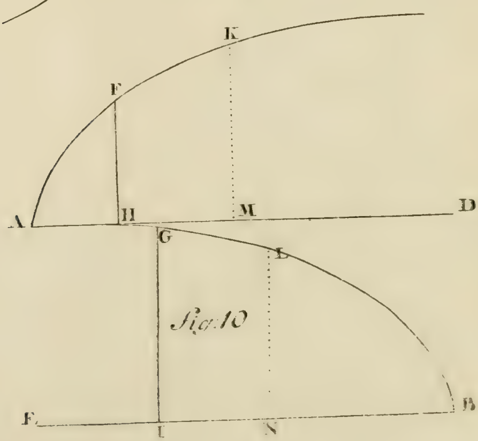


fig: 10

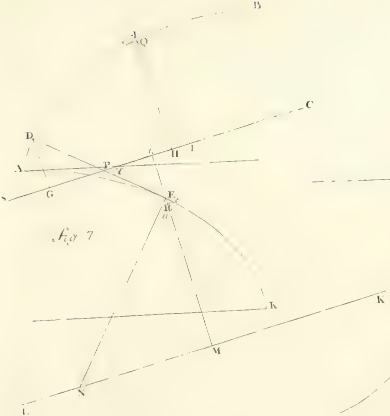


Fig 7

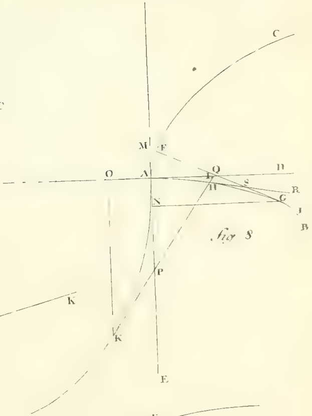


Fig 8

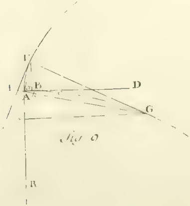


Fig 9

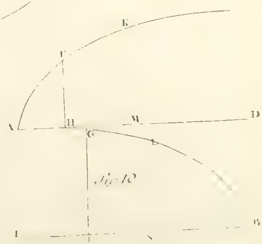
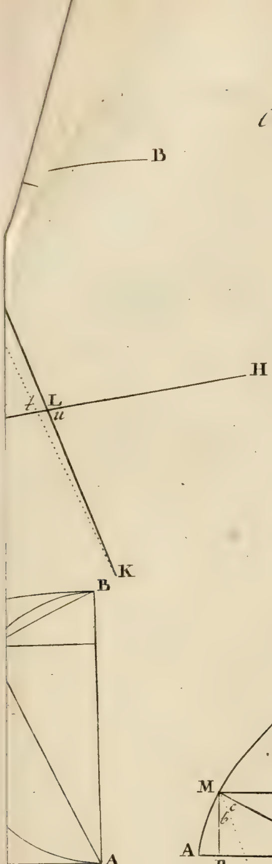


Fig 10



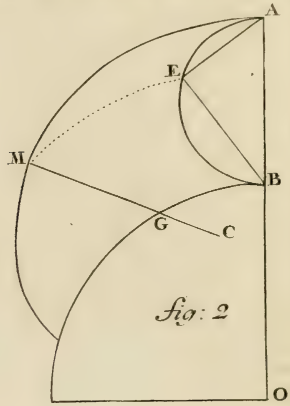


fig: 2

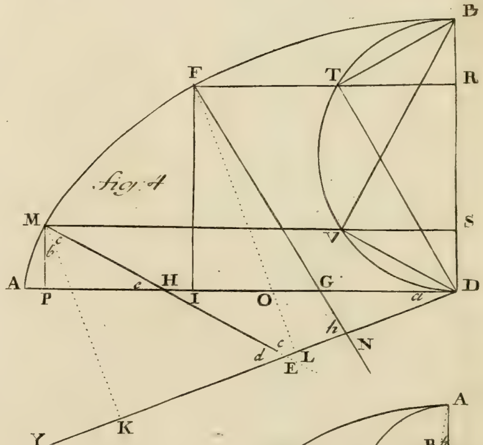


fig: 4

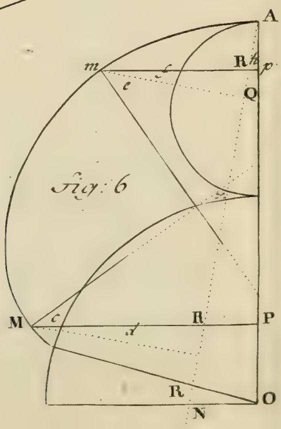
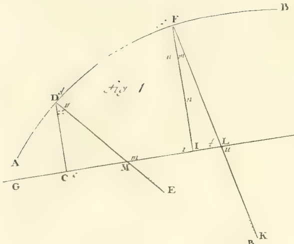
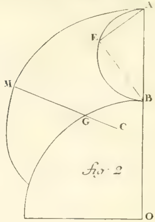
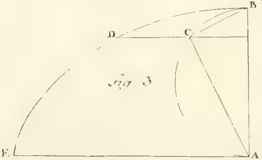
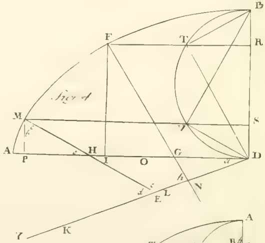


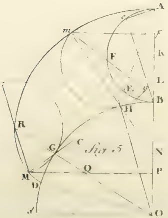
fig: 6

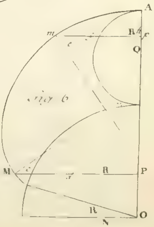

Fig. 1
A
B
D
F
G
C
M
E
I
L
H
K


Fig. 2
A
E
M
B
G
C
O


Fig. 3
B
D
C
E
A


Fig. 4
B
F
T
R
M
S
A
P
H
I
O
G
D
N
E
L
K
Y


Fig. 5
A
m
F
E
B
H
L
R
G
C
N
M
Q
P
D
O


Fig. 6
A
m
R
Q
M
P
R
O
N

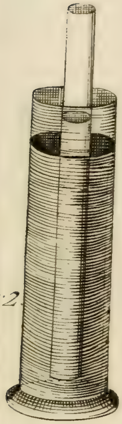


fig. 2

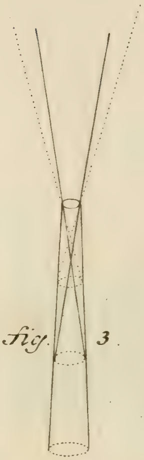


fig. 3

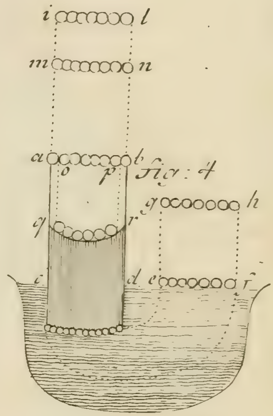
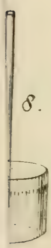


fig: 4



8.

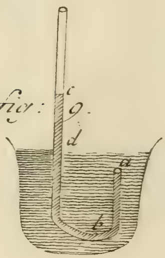


fig: 9.

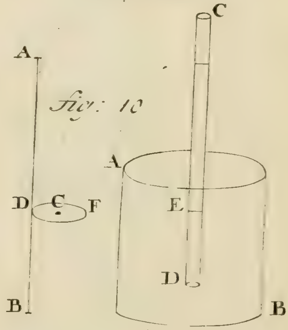
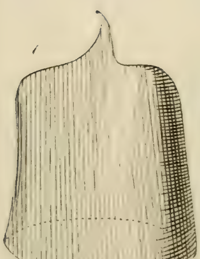


fig: 10



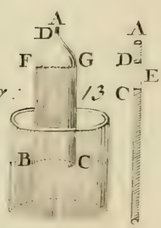
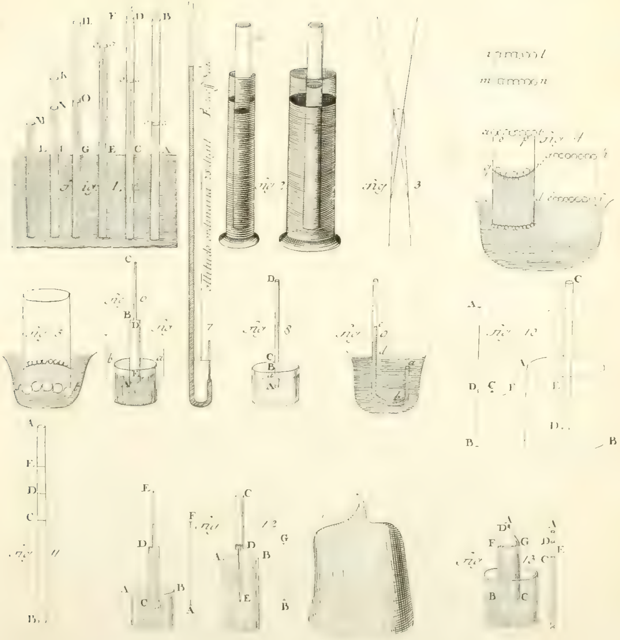
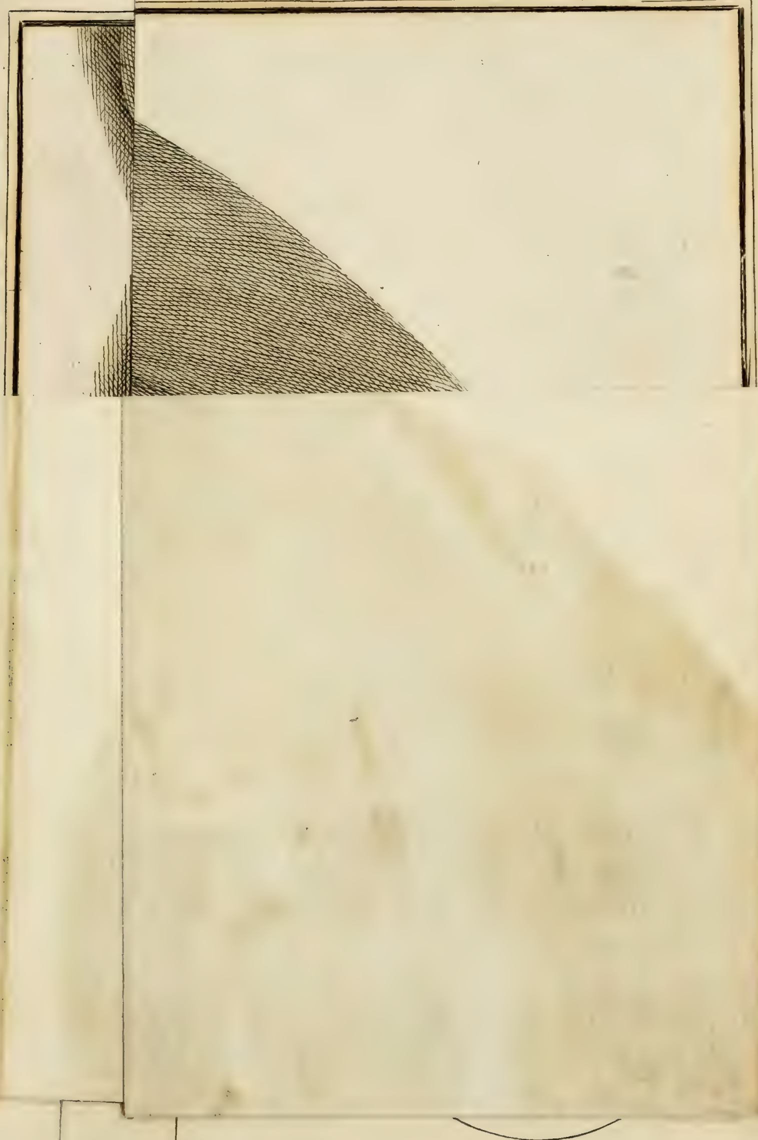


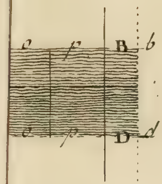
fig: 13






A
B
C

Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 19.
p. 342





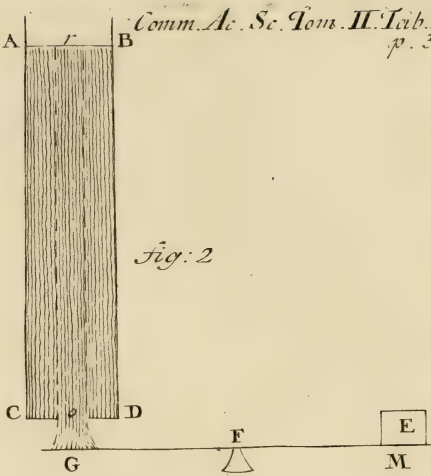


fig: 2

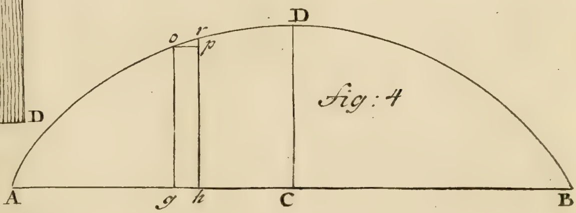
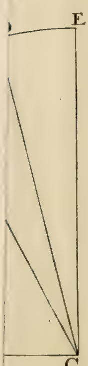


fig: 4



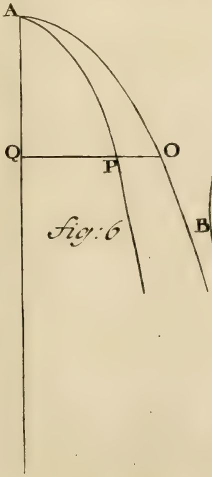


fig: 6

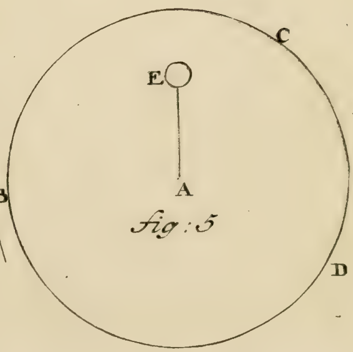
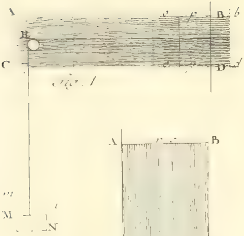
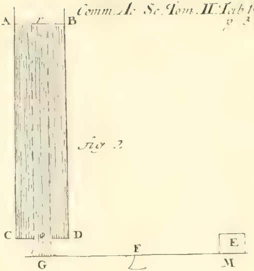
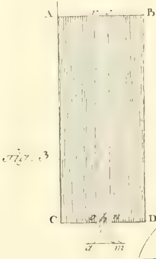
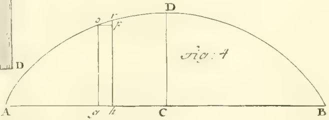


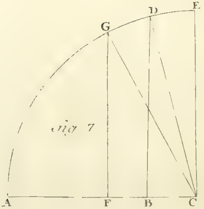
fig: 5

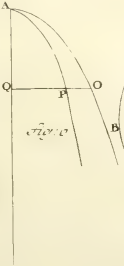

fig. 1

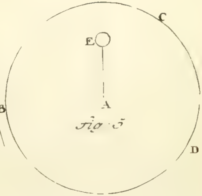

fig. 2


fig. 3


fig. 4


fig. 7


fig. 6


fig. 5









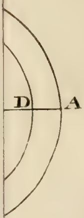
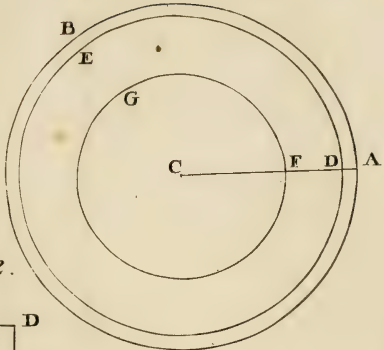
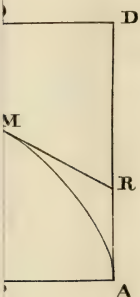


fig: 2.





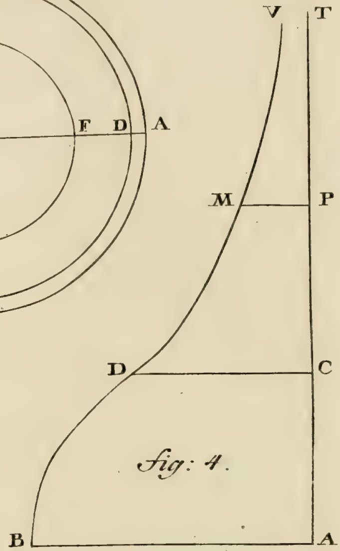


fig: 4.

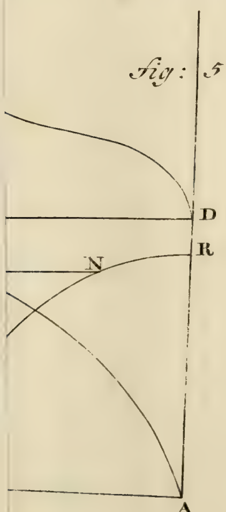


fig: 5.

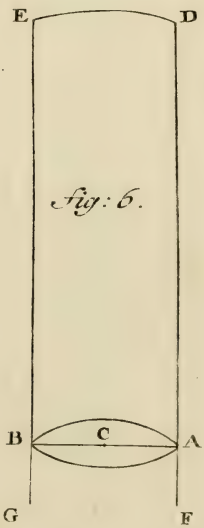


fig: 6.

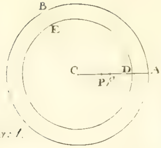


Fig: 1.

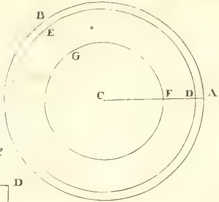


Fig: 2.

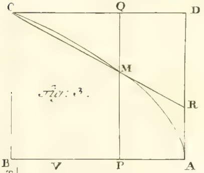


Fig: 3.

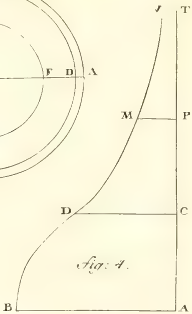


Fig: 4.

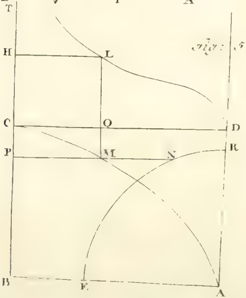


Fig: 5.

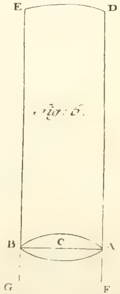


Fig: 6.



Fig: 2.



Fig: 3.

fig: 1.

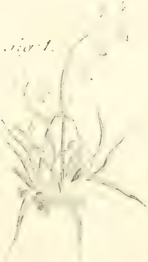


fig: 2.

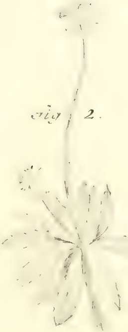


fig: 3.



Comm. Ac. Sc Tom. II. Tab. 24. p. 370.

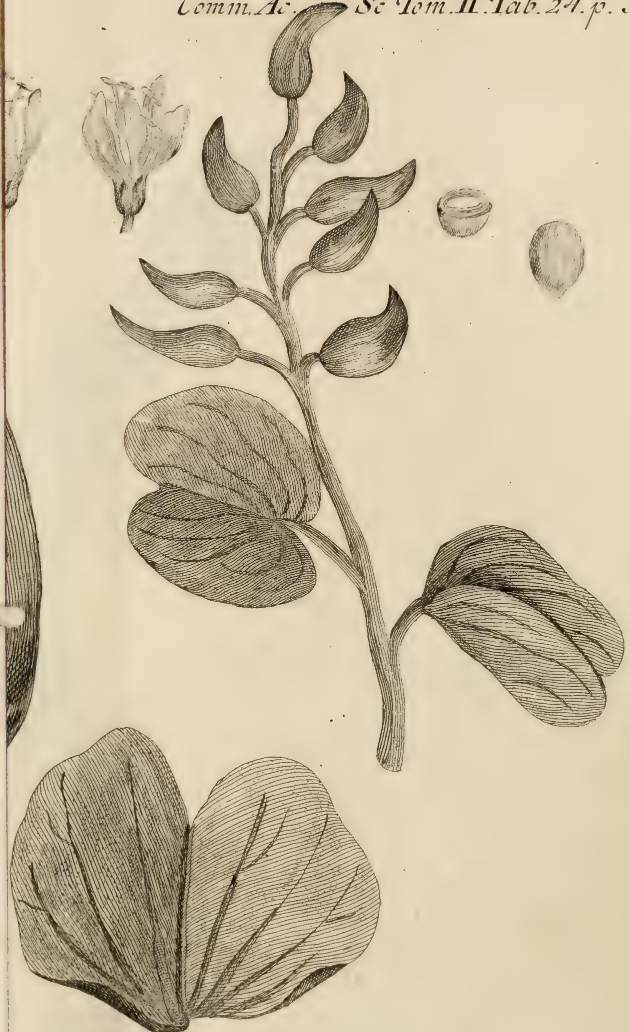








Fig. I.

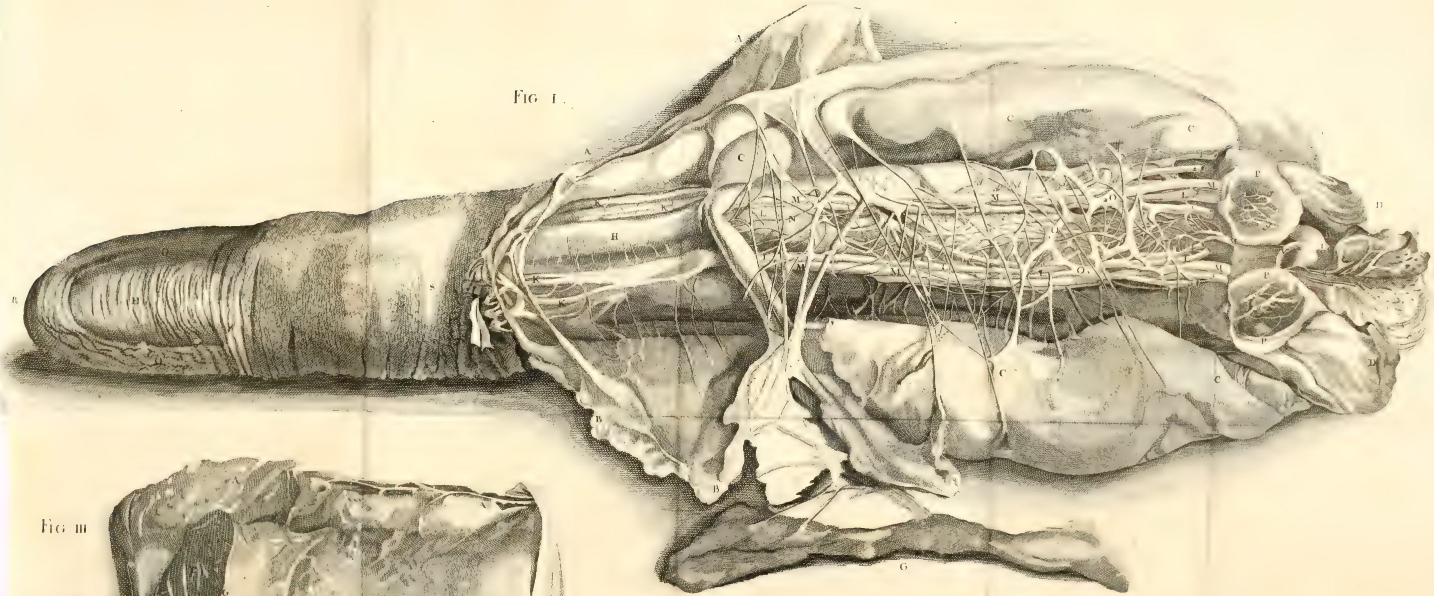


Fig. III.

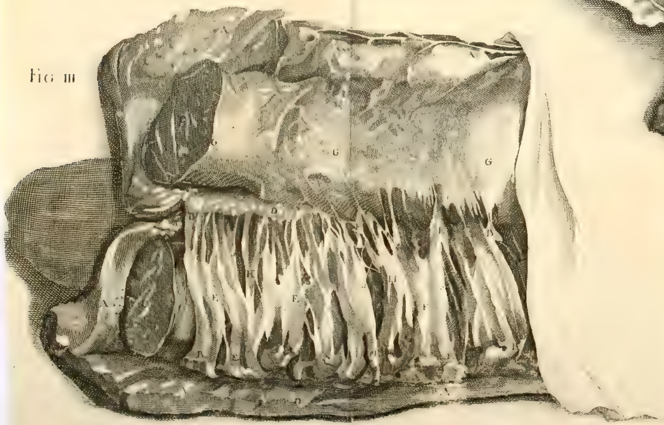
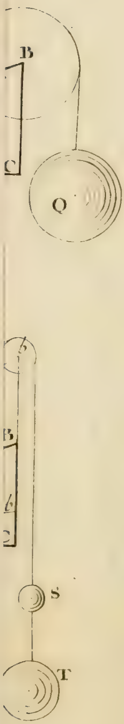


Fig. II.



O. Elliger fec. Petropoli



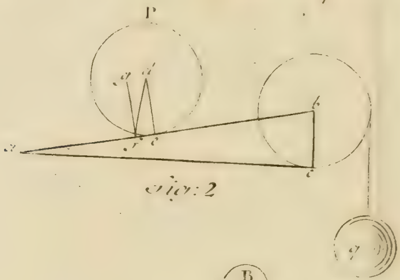


Fig: 2

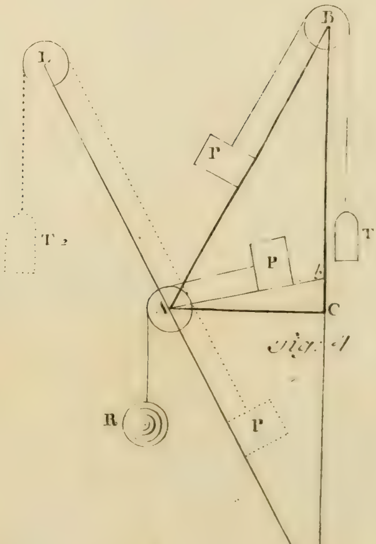


Fig: 4

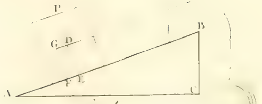


Fig. 1

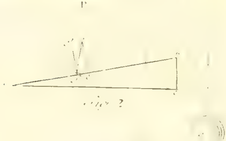


Fig. 2

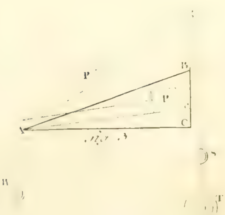


Fig. 3

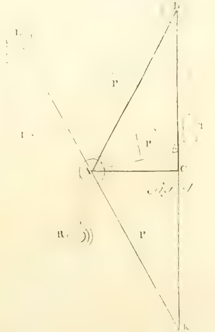
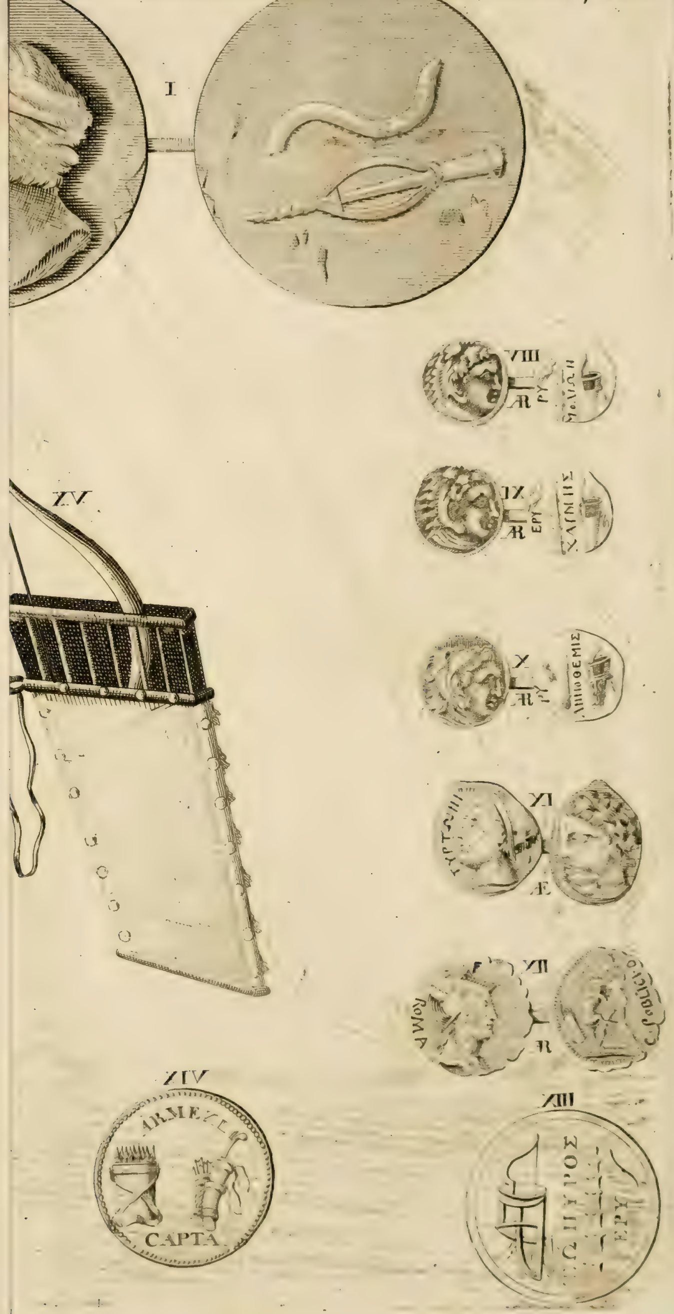
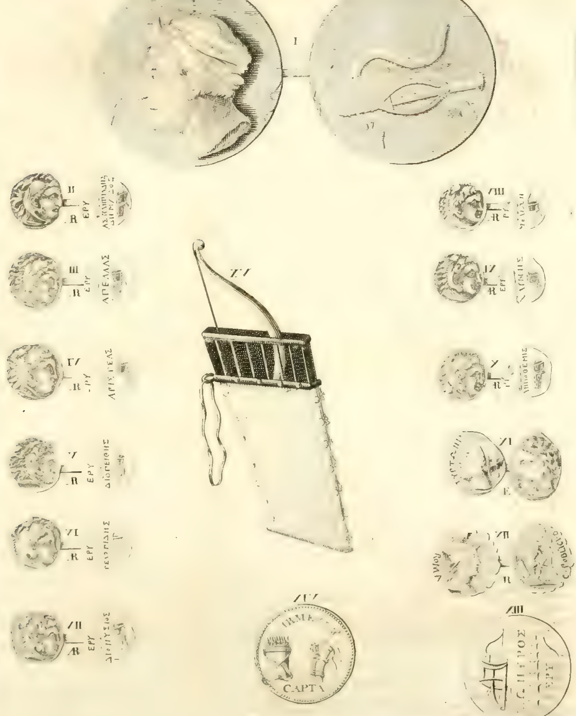


Fig. 4


I
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
CAPTA
XV


I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XV
XVI
ΕΡΥ
ΑΠΕΛΛΑΣ
ΔΙΟΓΕΙΘΗΣ
CAPTA


tz
k
ch
h
g
h
h
Latus Orientale
Septent.
Latus Occidentale
Austr.
Scala Rhinland: diminuta quinque pedum
Fig: 6


fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 5
fig. 6
fig. 6
fig. 6
fig. 6
Latus Orientale
Latus Occidentale
Scala Rhinland.

AMNH LIBRARY
100127241